RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 febbraio 1915.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sull'impiego della soluzione acquosa di acetato mercurico nell'analisi della parte terpenica delle essenze.* Nota del Corrispondente L. Balbiano [1].

Fin dal 1901 in una Nota pubblicata nella Chemiker Zeitung, pag. 932, proponevo la soluzione acquosa satura a freddo di acetato mercurico, come reagente atto a svelare la presenza delle olefine nei petrolii naturali, perchè tale reattivo non agiva sugli idrocarburi aromatici, nè sulle paraffine, nè sui cicloidrocarburi saturi « *nafteni* », mentre agiva ossidante, trasformandosi l'acetato mercurico in mercuroso insolubile, sulle olefine. Le mie esperienze venivano, in quest'ultimo decennio, confermate ed ampliate da altri chimici.

Il dott. Jenö Tausz [2], nel laboratorio del prof. Engler del politecnico di Karlsruhe, nella sua tesi di laurea, sottoponeva il metodo da me proposto per l'analisi delle benzine del petrolio ad una minuta critica sperimentale e concludeva: *Die Methode ist somit für den Nachweis der unter 100° siedenden ungesättigten Kohlenwasserstoffe brauchbar.* La modificazione

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica organica del R. Politecnico di Torino.

[2] *Beiträge zur identifizierung und Kenntniss der Kohlenwasserstoffe des Erdöls.* Inaug. diss. Polytech. Karlsruhe. Borna-Leipzig, Buchdruckerei Robert Noske, 1911.

più importante introdotta dal Tausz e che rende pratico il metodo, è di far agire la soluzione di acetato mercurico alla temperatura di 100° anzichè alla temperatura ambiente; così si abbrevia la durata della reazione che si può ridurre a 3 ore.

Altri chimici applicarono il processo d'ossidazione coll'acetato mercurico disciolto alla ricerca dei legami olefinici nelle sostanze grasse, e fra questi A. Leys [1] adopera la mia reazione, e siccome discioglie l'ossido di mercurio ed il grasso nell'acido acetico concentrato, non usando l'acetato mercurico già fatto, ritiene la sua reazione originale e naturalmente trascura di citare il mio lavoro anteriore di sei anni.

C. Grimaldi e L. Prussia [2] applicarono la soluzione di acetato mercurico alla ricerca e determinazione dei derivati del petrolio negli olii di trementina, lavorando un metodo pratico che permette di svelare tale sofisticazione.

La mia reazione serve anche, come ho dimostrato nel 1909 [3], a separare i composti naturali delle essenze che contengono i due radicali C_3H_5 *allile* e *propenile*, perchè l'azione dell'acetato mercurico introdotto in quantità stechiometrica nella miscela reagisce prima sul radicale *allile*, formando il composto aceto-mercurico fisso, e lascia inalterato il composto *propenilico* volatile col vapore d'acqua [4].

L'azione della soluzione acquosa di acetato mercurico si esplica sui terpeni in due modi differenti. Il pinene viene ossidato a diossipinene [5]; il canfene invece dà un composto aceto-mercurico di un'ossicanfene.

[1] Bl. 1907, 262, 543.

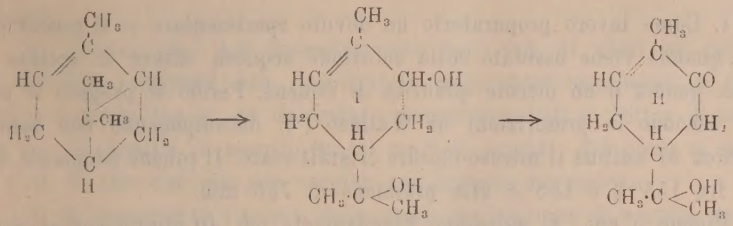
[2] Ann. chim. appl., tom. I, 1914, pag. 324.

[3] R. A. L., XVIII, serie 5ª, 372. B. *42*; 1502 [1909].

[4] Questa reazione è *l'unica praticamente distintiva*, conosciuta attualmente fra il radicale allile e propenile; perciò non so spiegarmi perchè il professor Nasini, nel suo audace discorso fatto al congresso della Società italiana per il progresso delle scienze (Atti 1912, pag. 320), dopo aver rilevato l'importanza del problema, abbia taciuto di essa nella « Rivista sintetica dei progressi della chimica organica durante i 50 anni d'unità nazionale », *esaltando* invece nella « Rivista sintetica dei progressi della chimica-fisica » il metodo — in origine del Gladstone — basato sul differente indice di rifrazione delle due serie di isomeri, metodo che, come ho avvertito nella mia Memoria (Atti accademici 1905), manca allo scopo quando si conosca soltanto uno dei due termini isomeri.

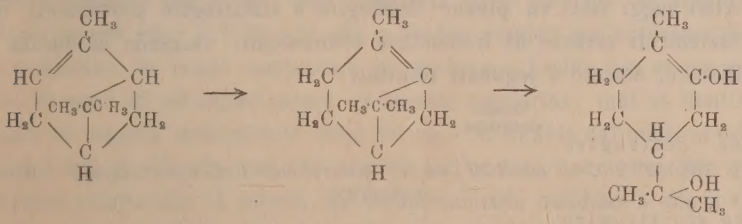
[5] Non ho risposto — contrariamente alla mia abitudine — alle osservazioni contenute nella Nota di G. G. Henderson e J. W. Agnew (Soc. *95*, 289, an. 1909) sulla costituzione del diossipinene che si ottiene per ossidazione acetomercurica del pinene, perchè non avevo alcun fatto da obbiettare alle loro conclusioni. Essendo essi riusciti ad isolare nel primo periodo di ossidazione il Sobrerolo (I), che poi nel secondo periodo si cambia nel chetone (II), ed inoltre avendo essi ottenuto coll'idrogenazione mediante il sodio e la soluzione eterea umida del chetone la ritrasformazione in Sobrerolo, mentre tale passaggio non mi era stato possibile coll'idrogeno svolto dall'amalgama di alluminio, le loro conclusioni erano logicamente dedotte.

Ho quindi un mezzo per separare questi due terpeni nelle essenze naturali: ed a questo scopo ho lavorato un metodo analitico che mi permette di separare e riconoscere in una miscela di idrocarburi, le paraffine, gli aroma-

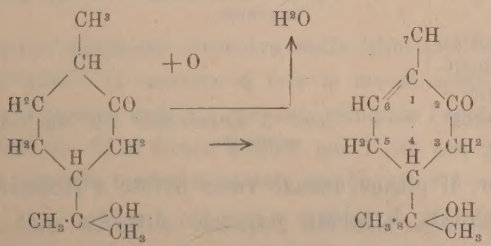


Però mi è sempre stato difficile di spiegare la formazione del Sobrerolo in prima fase di reazione, perchè l'esperienza mi aveva insegnato che il *pinane*, prodotto d'idrogenazione del pinene col metodo Sabatier-Senderens, non reagiva per niente colla soluzione acquosa di acetato mercurico. Da ciò deducevo che la reazione ossidante era soltanto provocata dal legame etilenico del pinene, non dalla rottura del ponte, come era proposta nella mia interpretazione ed ammessa la costituzione del pinene, dimostrata dall'*abbau* permanganica del Wagner e del Baeyer, questo legame non era attaccato al C al quale si aggrappa l'isopropile; doveva quindi presumibilmente avvenire prima nel pinene uno spostamento del doppio legame.

Verso la fine del 1911 Zelinsky (Ber. *44*, 2782) dimostrò che per azione del nero di palladio, preparato con certe modalità, il pinene si isomerizza cataliticamente, alla temperatura ordinaria, in *isopinene* con trasporto del legame etilenico al C al quale si aggrappa l'isoproprile. Allora ammettendo tre fasi nella reazione — 1°) sloggiamento del legame etilenico; 2°) rottura del ponte; 3°) saturazione con -OH delle valenze libere — si ha la forma chetonica del Sobrerolo, che, ossidata ulteriormente, dà il diossipinene. I passaggi delle diverse fasi sono rappresentati dai seguenti schemi.



Pinene — Isopinene — Forma enolica del Sobrerolo



Forma chetonica del Sobrerolo — Diossipinene
Δ^{6}-8-ossimentene(2)one

tici, le cicloparaffine, le olefine ed i terpeni, impiegando la soluzione satura a freddo, di acetato mercurico. Espongo in questa breve Nota i risultati ottenuti.

Parte sperimentale.

I. Come lavoro preparatorio ho dovuto sperimentare se il pinene purissimo, quando viene ossidato colla soluzione acquosa satura di acetato mercurico, genera o no piccole quantità di cimene. Perciò si preparò il pinene puro secondo le prescrizioni di Wallach (1), decomponendo con soluzione alcoolica di anilina il nitroso-cloruro cristallizzato. Il pinene adoperato distillava fra 155°.2 e 155°,8 alla pressione di 750 mm.

Pinene 5 cm.^{3} si agitarono blandamente per 40 minuti con gr. 40 acetato mercurico secco sciolti in 160 cm.^{3} di acqua e quando già si era prodotto il deposito di acetato mercuroso, si fece bollire a ricadere la massa a bagno d'olio per ore 1,30 a viva ebollizione, condensando il vapore con refrigerante Soxhlet a doppia circolazione d'acqua. Si distillò in seguito circa 90 cm.^{3} di liquido, dal quale, mediante imbuto a robinetto e buretta graduata divisa in centesimi, si separarono cm.^{3} 0,35 di olio galleggiante. Questi cm.^{3} 0,35, agitati con soluzione satura di acetato mercurico, davano ancora la riduzione ad acetato mercuroso.

In un'altra esperienza in cui l'ebollizione a ricadere s'era protratta per 3 ore, 5 cm.^{3} pinene dettero cm.^{3} 0,02 di olio che dava ancora la reazione coll'acetato mercurico. In queste condizioni il 99,6 % di pinene s'era ossidato, trasformandosi il 47,8 % di esso in diossipinene, perchè il semicarbazone ottenuto pesava gr. 3,248.

Altri saggi fatti su pinene destrogiro e sinistrogiro provenienti dalla distillazione di essenze di trementina commerciali, variando la durata dell'ebollizione, dettero i seguenti risultati:

	Durata ebollizione	
Pinene destrogiro p. eb. 158-159° . . .	ore 1.30	cm.^{3} 5 dettero cm.^{3} 0,05 olio reagente coll'acetato mercurico.
Pinene sinistrogiro p. eb. 158-160° . . .	» 2	cm.^{3} 5 dettero cm.^{3} 0,05 olio reagente coll'acetato mercurico.
Pinene dalla trementina veneta. Essenza distillata in laboratorio e rettificata, p. e. 160-161°	» 4	cm.^{3} 5 dettero cm.^{3} 0,1 olio reagente coll'acetato mercurico.

Riassumendo: il pinene, quando viene bollito a ricadere per 2 a 4 ore colla quantità richiesta di acetato mercurico disciolto in 4 p. di acqua, si

(1) A. *258*, 344.

decompone integralmente, resinificandosi in gran parte; ma circa il 50 % si ossida a diossipinene. Con queste esperienze viene provato che in questa ossidazione non si produce quantità apprezzabile di cimene.

II. Col pinene depurato col processo di Wallach si fecero le seguenti esperienze:

a) Pinene cm.^{3} 4,5 mescolati con cm.^{3} 0,5 di eteri di petrolio p. eb. 40°-65°, risultanti non reazionabili coll'acetato mercurico, si fecero bollire a ricadere con p. 40 di acetato mercurico sciolti in 160 p. di acqua, per 3 ore. Si distillò in seguito 80-90 cm.^{3} di liquido, dal quale si separò cm.^{3} 0,35 di olio che più non reagiva con acetato mercurico.

b) Si sperimentò l'azione della soluzione acquosa di acetato mercurico sul pinane, $C_{10}H_{18}$, ottenuto per idrogenazione del pinene dall'essenza di trementina col metodo di Sabatier e Senderens. Il pinane adoperato bolle a 166°, e non reagisce nè a freddo nè a caldo colla soluzione di acetato mercurico.

Pinane cm.^{3} 5 vennero agitati alla temperatura ordinaria con 40 gr. di acetato mercurico secco sciolti in 160 p. di acqua. Dopo un contatto di 48 ore la soluzione s'era conservata perfettamente limpida. Si fece bollire a ricadere per 2 ore; indi si distillarono circa 100 cm.^{3} di liquido, sul quale galleggiavano cm.^{3} 4,7 di pinane inalterato. La soluzione acquosa, dopo l'ebollizione, era colorata leggermente in giallo, e s'era depositata una piccola quantità di ossido rosso di mercurio coll'idrolisi dell'acetato.

c) Una miscela di cm.^{3} 4,5 pinene di Wallach e cm.^{3} 0,5 pinane, trattati con 40 gr. di acetato mercurico secco sciolti in 160 p. di acqua, e fatti bollire a ricadere per 2 ore; indi distillati circa 100 cm.^{3} di liquido dal quale si separò cm.^{3} 0,7 di olio che a freddo reagiva con soluzione di acetato mercurico. Si lasciò completare la reazione a freddo per 48 ore adoperando 10 cm.^{3} di soluzione satura di acetato mercurico; indi si distillò in corrente di vapore raccogliendo circa 10 cm.^{3} di liquido dal quale si separarono cm.^{3} 0,3 di olio che più non reagiva coll'acetato mercurico. Da questa esperienza risulta che il pinene era completamente ossidato, e che il 60 % del pinane era riottenuto separato dalla miscela.

III. Il canfene adoperato proveniva dalla fabbrica C. A. F. Kahlbaum; distilla fra 155°-156°; la reazione si fece in mezzo acido, acidulando con acido acetico previamente saggiato che non riducesse l'acetato mercurico (1).

a) Canfene gr. 2, si fecero bollire per 7 ore con gr. 16 di acetato mercurico — la quantità teorica di acetato sarebbe gr. 9,3 — sciolti in 64 gr.

(1) L'acido acetico, che nel suo catalogo il Kahlbaum segna con sigla speciale, soddisfa a questa condizione. Molti acidi provenienti da diverse fabbriche riducono più o meno l'acetato mercurico, a seconda della quantità di acidi non saturi che contengono.

di acqua acidulata con 5 cm.^{3} di acido acetico glaciale. Il canfene aveva reagito completamente e s'era trasformato nel composto aceto-mercurico insolubile, sotto forma di un precipitato bianco-giallognolo, che, lavato con acqua e disseccato nel vuoto su acido solforico, pesa gr. 10,5 e fonde verso 187°. Per 2 gr. canfene si calcola gr. 9,8 composto $C_{10}H_{16}O(HgC_2H_3O_2)^2$. I gr. 10,5 di composto si sospesero in acido cloridrico diluito (1 vol. acido concentrato, 1 vol. acqua), e si riscaldarono a bagno-maria con zinco granulato in matraccio munito di refrigerante ascendente, per 8 ore; indi si distillò in corrente di vapore. Col vapor d'acqua si raccolsero gr. 1,4 di canfene.

b) Canfene gr. 2 sciolti in 5 cm.^{3} benzolo, trattati colla stessa quantità di soluzione di acetato mercurico (16 in 64 acq.), fatti bollire per 2 ore a ricadere, e distillata in seguito la massa in corrente di vapore; si separarono cm.^{3} 4,3 di benzolo, che più non reagiva coll'acetato mercurico: e dal precipitato, il quale, lavato e disseccato, pesava gr. 9,63 e fondeva verso 190°, si riottennero gr. 1,88 di canfene.

c) Canfene gr. 2 sciolti in 5 cm.^{3} pinene, trattati colla stessa quantità di soluzione di acetato mercurico (16 in 64 acq.), bolliti a ricadere per 2 ore, dettero nel distillato cm.^{3} 4,5 pinene; e dal composto aceto-mercurico pesante gr. 10 e fus. a 188°-189°, si riottenne gr. 1,7 di canfene.

d) Canfene gr. 1, sciolti in cm.^{3} 2 pinene Wallach, vennero bolliti a ricadere per ore 2,30 con gr 23 acetato mercurico sciolti in 92 gr. di acqua acidulata con 2 cm.^{3} di acido acetico. La massa distillata in corrente di vapore, più non svela terpene inalterato. Il precipitato di acetato mercuroso e di composto aceto-mercurico del canfene, sul quale si osservavano delle piccole goccioline di mercurio ridotto, si filtrò, si lavò con acqua, indi si riscaldò a bagno-maria con acido cloridrico e zinco. Dopo 8 ore di riscaldamento a ricadere, si distillò in corrente di vapore, e nel distillato si raccolse circa gr. 0,7 di canfene. Le acque filtrate si svaporarono a secco a bagno-maria, ed il residuo si riprese con etere. L'etere, lavato con acqua e distillato, lasciò un residuo oleoso, che, trattato con cloridrato di semicarbazide ed acetato potassico, dette gr. 0,95 di semicarbazone del diossipinene, circa il 30 % del pinene adoperato.

IV. La miscela complessa di 2 cm.^{3} pinene Wallach, 2 cm.^{3} cimene, 2 cm.^{3} pinane, 1 gr. canfene, si trattò con gr. 33 di acetato mercurico secco disciolti in 132 cm.^{3} di acqua acidulati con 5 cm.^{3} di acido acetico. Si fece bollire a ricadere per ore 2,30, mantenendo viva l'ebollizione ed agitando di frequente la massa per rompere i grumi di composti di mercurio che andavano man mano formandosi. Dal distillato in corrente di vapore si separarono cm.^{3} 3,5 di olio, miscela di cimene e pinane, che più non reagiva con acetato mercurico, segno che la reazione era avvenuta completa. Dalla

massa di acetato mercuroso e composto aceto-mercurico del canfene, col trattamento con zinco ed acido cloridrico e successiva distillazione in corrente di vapore, si separarono circa gr. 0,6 di canfene, che si conservò liquido per qualche giorno, ma che infine cristallizzò. Le acque evaporate a bagno-maria, il residuo ripreso con etere, la soluzione eterea lavata ripetutamente con acqua, lasciarono alla distillazione un olio colorato in giallo rosso, che, sciolto in alcool e trattato con soluzione acquosa di cloridrato di semicarbazide ed acetato potassico, dette gr. 0,85 di semicarbazone del diossipinene, circa il 25 % del pinene adoperato.

Riassumendo i risultati sperimentali esposti, risulta:

1°) Che la reazione ossidante esercitata dalla soluzione acquosa di acetato mercurico viene grandemente agevolata dall'azione del calore, anche nel caso che, come pel canfene, si formi un composto aceto-mercurico del terpene.

2°) Che l'acetato mercurico non reagisce cogli idrocarburi aromatici — fatto già rilevato nelle mie ricerche del 1901 — nè colle cicloparaffine, come ho dimostrato nel 1904 (1) studiando col dott. Angeloni l'inattività di tale soluzione sull' 1-3-dimetilcicloesano dall'acido canforico, nè cogli idrocarburi $C_{10}H_{18}$ biciclici, tipo pinane. Questi fatti, confermati dal Tausz, vennero completati da lui collo studio delle paraffine che si dimostrano non reazionabili.

3°) Che l'acetato mercurico reagisce quantitativamente sul canfene formando il composto aceto-mercurico di un ossicanfene che, decomposto con zinco ed acido cloridrico, ridà il canfene in quantità oscillanti fra il 70 e 94 % dell'adoperato. Tali differenze provengono dalla difficoltà tecnica di condensare quantitativamente piccole porzioni di canfene nella distillazione in corrente di vapore.

4°) Che da una miscela di terpeni, cicloidrocarburi, carburi aromatici e paraffine, la soluzione acquosa di acetato mercurico serve a separare i terpeni.

A questo proposito io mi permetto di rivolgere pubblicamente la preghiera ai miei colleghi chimici che maneggiano e scoprono nuovi terpeni, di voler provare su di essi l'azione della detta soluzione. Si completerà così il processo d'analisi immediata della parte terpenica delle essenze che le mie ricerche hanno abbozzato.

(1) R. A. L., tom. XIII, ser. 5ª pag. 142 (1904).

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* Nota V [1]: *Le contrazioni del preparato diaframmatico provocate da stimoli unici* [2], del Corrisp. FILIPPO BOTTAZZI.

Le contrazioni provocate da stimoli unici (d'apertura di corrente indotta) sogliono essere dette *semplici* o *uniche*. Queste mie ricerche tendono a dimostrare che semplici esse non sono sempre, se, così chiamandole, si vuol dire che risultano di un unico processo contrattorio. Le curve delle contrazioni semplici di solito presentano, dopo il periodo di latenza, un tratto ascendente culminante in un apice, al quale segue un tratto discendente che raggiunge

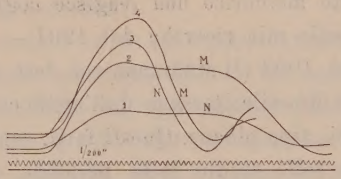


FIG. 1

Le curve 3 e 4 furono registrate prima delle curve 1 e 2: col tempo apparisce la contrazione tonica.

[N. B. Ciascuna delle curve riprodotte in questa e nelle figure seguenti è da considerarsi come rappresentante tipica di gruppi di contrazioni ottenute in molti esperimenti simili. Nel riprodurle dai tracciati, sono state fotograficamente ridotte a $^1/_3$ delle dimensioni originali].

l'ascissa. Tali contrazioni eseguisce anche il preparato diaframmatico (fig. 1, curve 3 e 4), stimolato sia direttamente (contrazioni *M*), sia indirettamente, cioè per il tramite del nervo (contrazioni *N*). Spesso però il preparato diaframmatico compie contrazioni, che possono dirsi *doppie*, perchè le rispettive curve presentano più o meno distintamente due elevazioni diverse d'aspetto, come se fossero composte d'una prima *contrazione rapida* o *clonica* e di una seconda *contrazione lenta* o *tonica*. Generalmente, solo la prima ha un

[1] Le Note precedenti sono pubblicate: la I^a, nelle Mem. d. R. Accad. d. Lincei (5), vol. X, p. 489-630, a. 1914; la III^a, in questi Rendic. (5), vol. XIII, p. 539, a. 1914 e vol. XIV, p. 27 a. 1915; la IV^a, nel Volume giubil. dedic. ad A. Lustig (« Ricerche di Biologia »), Firenze 1915; la II^a è in corso di stampa nelle Memorie della R. Accad. dei Lincei.

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Napoli.

vero apice, mentre la seconda si manifesta con un'elevazione a forma di cupola, la quale s'inizia in un certo momento del periodo di allungamento della contrazione rapida, che per ciò ne rimane notevolmente prolungata o amplificata (fig. 1, curve 1 e 2; fig. 2, curve 1 e 2 ecc.). Raramente, in condizioni ordinarie, la cupola della contrazione tonica oltrepassa in altezza l'apice della contrazione clonica (ved. fig. 3, curva 2). Registrando successivamente, a intervalli più o meno grandi, un certo numero di gruppi di

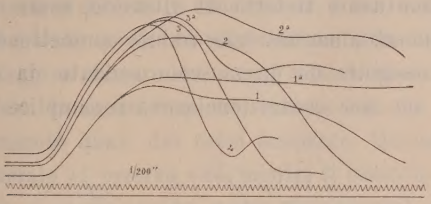


Fig. 2

Le curve si succedono nell'ordine da 1 a 4: in questo caso, col tempo, la contrazione tonica sparisce. Le curve 1ª, 2ª e 3ª sono le prime del rispettivo gruppo, e presentano più accentuata la contrazione tonica; le corrispondenti 1, 2 e 3 sono le ultime.

contrazioni, si può osservare, o che le curve, prima semplici, diventano mano mano doppie (fig. 1); o, viceversa, che, col tempo, dalle curve doppie mano mano sparisce la contrazione tonica rimanendo la contrazione clonica: cioè

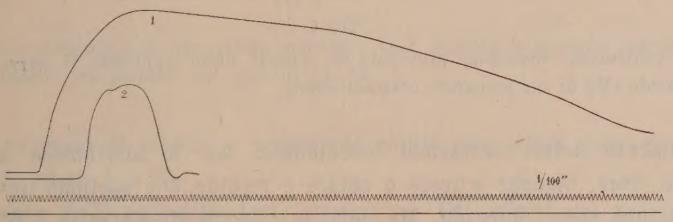


Fig. 3

La curva 1, registrata da un muscolo fresco e apparentemente normale, a 36° C, sembra curva di contrazione di un muscolo liscio. La curva 2 potrebbe scambiarsi con quella di un muscolo veratrinizzato.

che curve, prima doppie, diventano semplici (fig. 2). Talora, in condizioni speciali di eccitabilità, il muscolo freschissimo eseguisce contrazioni molto prolungate e toniche, come quella rappresentata dalla curva 1 della fig. 3.

La proprietà di eseguire contrazioni doppie non appartiene esclusivamente al preparato diaframmatico, ma, bensì, ad ogni muscolo striato. Contrazioni doppie, analoghe a quelle riprodotte in questo lavoro, furono registrate da quasi tutti gli autori che si sono ocupati di fisiologia muscolare. Mi basti rammentare le ricerche di Fick (1), di Funke (2), di Tiegel (3), di Tiger-

stedt (4), di Rollett (5) ecc., e particolarmente quelle di Yeo e Cash (6), di Lhoták von Lhota (7) e di Graham Brown (8); dalle quali risulta che il fenomeno della contrazione doppia o bicuspidata, sul quale io mi sforzo di richiamare l'attenzione dei fisiologi perchè vogliano considerarlo come manifestazione ordinaria dell'attività dei muscoli striati bianchi o rossi, di animali omeotermi o peciloterми, è stato osservato da moltissimi sperimentatori.

Tutti però hanno avuto il torto di ritenerlo, come ben dissero Yeo e Cash, come un fenomeno abnorme, trascurabile ammettendo schematicamente che la contrazione eseguita da un muscolo eccitato da uno stimolo unico non può essere se non una contrazione unica o semplice. Grützner (9) parla

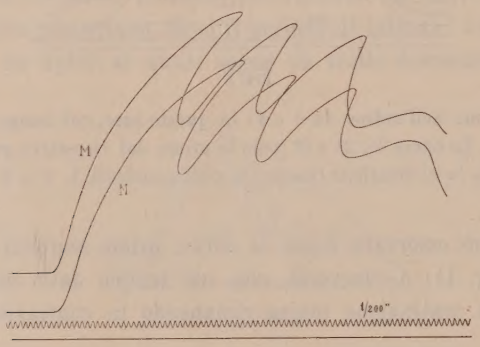


Fig. 4

Curve di contrazioni multiple, provocate da stimoli unici applicati al nervo (N) e al muscolo (M) di un preparato eccitabilissimo.

espressamente delle contrazioni biscupidate, ma le attribuisce alle due specie di fibre, bianche e rosse o chiare e torbide, che sogliono trovarsi insieme in uno stesso muscolo. Ma dopo le ricerche di Carvallo e Weiss (10), i quali hanno dimostrato che anche i muscoli esclusivamente bianchi del coniglio avvelenato con veratrina dànno curve tipicamente doppie, l'ipotesi del Grützner non è più sostenibile. Del resto, perfino un discepolo di lui, il Fischer (11), ha dovuto recentemente convenire che « certamente non ogni curva bicuspidata può spiegarsi coll'esistenza delle due specie di fibre muscolari ».

Io ho fatto per più anni di seguito numerosissime ricerche circa l'influenza che varî fattori esercitano sulla forma della contrazione del preparato diaframmatico, e ho ottenuto risultati che qui debbo limitarmi a riassumere in conclusiva brevità.

Influenza del peso. — Se il muscolo è caricato di un peso troppo piccolo, dopo la prima contrazione esso non può distendersi completamente; le curve successive non raggiungono l'ascissa primitiva, e si svolgono tutte sopra

ascisse notevolmente più alte. Se invece la carica è eccessiva, il tratto discendente di ogni curva oltrepassa in giù l'ascissa primitiva.

Con pesi intermedii, le contrazioni si svolgono normalmente. Spesso, aumentando successivamente il peso, accade di osservare che le contrazioni, prima apparentemente semplici, diventano mano mano doppie (fig. 5), presentandosi una contrazione tonica che, col crescere del peso, sempre più si accentua. Non sempre però il solo aumentare del peso basta a far apparire distintamente la contrazione tonica. In conclusione, è lecito solamente di affermare, che ove nel preparato esista la disposizione alla contrazione tonica (il che è vero nel maggior numero dei casi), una certa carica è necessaria perchè essa si manifesti in modo cospicuo, mentre non la si osserva nelle curve dello stesso muscolo quasi del tutto scaricato. Quando la detta disposizione esiste, in generale si osserva che, mentre il muscolo scaricato compie contrazioni molto alte e ampie (talora quasi cupoliformi), ma prive di una netta contrazione secondaria o tonica, aggiunto il peso *optimum* le contra-

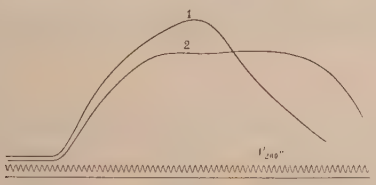


Fig. 5

Due curve di contrazione di uno stesso muscolo: la 1, quando il muscolo era scarico; la 2, quando era caricato del peso di gr. 13.

zioni diminuiscono di altezza e presentano subito una tipica contrazione tonica (fig. 5, curve 1 e 2).

Influenza della intensità degli stimoli. — Gli effetti del progressivo aumento della intensità delle scosse uniche d'apertura di corrente indotta sono: 1°) Aumento progressivo dell'altezza delle contrazioni rapide, fino a che sia raggiunto un valore massimo. 2°) Se la contrazione tonica è poco accentuata quando lo stimolo è debole, aumentando l'intensità di questo la contrazione tonica diventa sempre più cospicua. Talora, stimoli deboli provocano contrazioni semplici tipiche, che però diventano doppie, aumentando l'intensità degli stimoli (fig. 6). Siccome però vi sono casi nei quali le contrazioni rimangono semplici per quanto si aumenti l'intensità degli stimoli, bisogna ammettere che gli stimoli forti, per sè soli, non sono capaci di provocare la comparsa di contrazioni toniche in muscoli che, per ragioni ignote, non hanno disposizione ad eseguirle.

Influenza della temperatura. — Finora io non ho accennato affatto a questo importantissimo fattore di variazioni della forma della contrazione

muscolare, perchè i rispettivi esperimenti s'intendeva che fossero stati eseguiti alla temperatura *optimum* o a una prossima a questa. La temperatura *optimum*, cioè quella alla quale il preparato diaframmatico compie, a parità delle altre condizioni (peso, intensità degli stimoli ecc.), le più alte sebbene non le più rapide contrazioni, è di 34°-35° C., vale a dire alquanto inferiore alla temperatura centrale del corpo. A quella temperatura, la contrazione provocata da uno stimolo unico può essere, a seconda dei preparati, semplice o doppia, il che già dimostra che l'esistenza o meno di una contrazione tonica non dipende esclusivamente dalla temperatura.

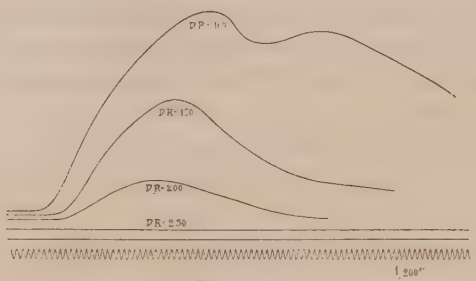


Fig. 6

Cinque curve di contrazione provocate da altrettanti stimoli d'intensità crescente da DR = 250 mm. (stimolo inefficace) a DR = 100 mm. Lo stimolo più forte provoca una cospicua contrazione tonica.

In molti esperimenti, ho determinato il periodo di latenza, l'altezza e la durata delle contrazioni provocate da stimoli di intensità costante, a temperature diverse. Riferisco nelle seguenti tabelle i dati raccolti in tre esperimenti diversi. Dalla I tabella risulta che, coll'aumentare della tempera-

Tabella I.

Numero d'ordine	Intensità dello stimolo DR =	Temperatura	Altezza delle curve	Durata delle contraz. (ampiezza)	Periodo di latenza	*Osservazioni*
1	100 mm.	15° C	—	—	—	Per le prime contrazioni la determinazione dell'ampiezza (durata) non fu possibile, perchè la leva scrivente si allontanava dal cilindro prima che la curva fosse tutta registrata.
2	»	17	mm. 6,5	—	0,05″	
3	»	20	19	—	0,047″	
4	»	22	29	—	0,037″	
5	»	26	55	mm. 150	0,02″	
6	»	30	68	84	0,015″	
7	»	33	64	80	0,012″	
8	»	35	37	90	0,015″	
9	»	36	31	95	0,017″	
10	»	37	25	95	—	
11	»	38	10	—	0,018″	

Tabella II.

Numero d'ordine	Intensità dello stimolo DR =	Temperatura	Altezza delle curve	Durata delle contraz. (ampiezza)	Periodo di latenza	*Osservazioni*
1	100 mm.	13° C	81 mm.	mm. 250	0,02″	—
2	»	18	86	220	0,017″	
3	»	20	104	190	0,005″	
4	»	25	104 o più	190	0,004″	
5	»	31	103 mm.	100	0,005″	
6	»	35	100	95	0,011″	
7	»	37	60	85	0,015″	

Tabella III.

Numero d'ordine	Intensità dello stimolo DR =	Temperatura	Altezza delle curve	*Osservazioni*
1	100 mm.	27° C	mm. 73	Ore 11
2	»	29	66	
3	»	30	83	
4	»	31	87	
5	»	31	87	Contrazioni doppie
6	»	35	100	
7	»	38	93	
8	»	40	88	
9	»	40	87	
10	»	40	80	
11	»	41	62	
12	»	40	51	
13	»	36	47	
14	»	35	48	
15	»	31	50	Ore 18

tura. il periodo di latenza prima diminuisce e poi tende di nuovo ad aumentare un poco; l'altezza delle contrazioni prima aumenta e poi di nuovo diminuisce; la durata totale (ampiezza) di esse, prima diminuisce e poi di nuovo aumenta. Lo stesso dimostra la II tabella, con la sola differenza che la durata delle contrazioni, in questo caso, diminuisce sempre col crescere della temperatura. Nell'esperimento, cui si riferiscono i dati della III tabella, la temperatura fu fatta prima aumentare e poi di nuovo diminuire. Anche l'altezza delle contrazioni prima aumentò e poi diminuì; ma la dimi-

nuzione di essa s'iniziò mentre la temperatura era ancora in via d'aumento; e quando questa tornò ad abbassarsi. le contrazioni tornarono ad aumentare d'altezza.

Si osservino le curve delle figg. 7 e 8.

Dai dati raccolti nelle tabelle e da queste figure risulta che spesso le più alte contrazioni sono quelle che il muscolo compie a una temperatura non prossima a quella centrale del corpo, ma di molto inferiore (ancor che

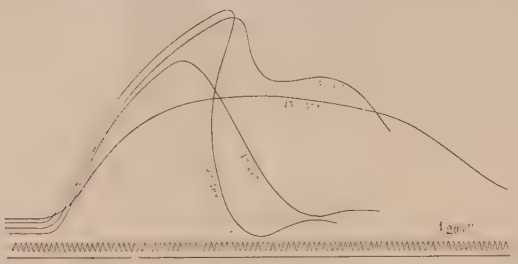


Fig. 7

Quattro contrazioni di uno stesso muscolo registrate a temperature diverse. Una contrazione tonica distinta si vede solamente nella 4ª curva. La curva 13ª è molto prolungata, probabilmente a causa della fatica.

variabile secondo i casi), il che è in accordo con i risultati ottenuti da Gad e Heymans ([12]), da Fröhlich ([13]) e particolarmente da Gayda ([14]). Questo fenomeno singolare può solo ora essere spiegato, considerando che, come ri-

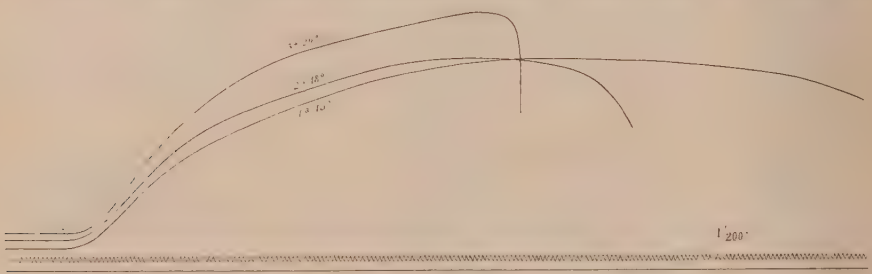


Fig. 8

Curve di contrazione di un muscolo raffreddato a 20°-13° C. Si vede nettamente, specie nella 3ª, come l'apice è fatto dalla contrazione tonica.

sulta dai miei tracciati, solo entro certi limiti di temperatura sotto la temperatura centrale del corpo la contrazione tonica, quando si presenta, è massimamente sviluppata, tanto da elevarsi col suo apice al di sopra della contrazione clonica Per es., nella curva 3ª della fig. 8. l'apice della curva complessiva è fatto dalla contrazione tonica. che si distingue abbastanza bene dalla contrazione primaria. L'altezza così grande di quella curva, alla

temperatura relativamente assai bassa di 20° C. è determinata dal fatto che la contrazione tonica si sovrappone alla clonica. Crescendo la temperatura, la contrazione tonica diventa sempre meno cospicua, fino a scomparire del tutto, come nella 9ª curva della fig. 7. Nell'esperimento corrispondente, la contrazione tonica si manifestò solo fra i 29° e i 35° C; non se ne vide traccia a temperature inferiori (27°-24° C) nè superiori (37°-42° C). È evidente che qui non si può parlare di un coefficiente termico ([15]) costante della contrazione muscolare; ma ciò dipende assai probabilmente dal fatto, sul quale io insisto, che la contrazione muscolare non risulta di un unico processo contrattorio, ma almeno di due, ciascuno dei quali può avere un coefficiente termico distinto.

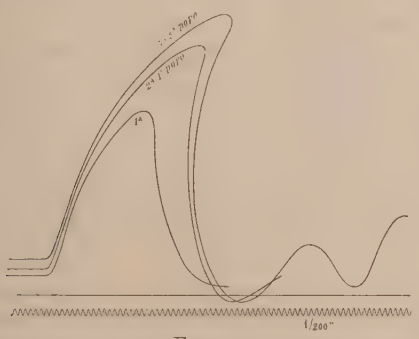


Fig. 9

Azione iniziale della veratrina: 1ª, curva normale; 2ª, 1′ dopo l'azione della veratrina; 3ª, 5′ dopo. Aumento progressivo delle altezze di contrazione, provocato dalla veratrina.

Influenza della veratrina. — Dalle mie ricerche risulta, che la veratrina determina i seguenti effetti nel preparato diaframmatico: 1°) In primo luogo, subito dopo l'azione della veratrina (fig. 9), aumenta l'altezza delle contrazioni (ved. a questo proposito il lavoro di Carvallo e Weiss, 10), che man mano diventano anche più ampie. 2°) Quindi sempre più si sviluppa la contrazione tonica ([16]), che viene assumendo addirittura l'aspetto di contrattura (fig. 10); col tempo, mentre s'intensifica la contrattura, s'indebolisce la contrazione clonica, sino a fondersi interamente con la prima: allora le rispettive curve assumono l'aspetto di quelle dei muscoli fetali da me già descritte in un'altra pubblicazione [[17]], che somigliano, quanto alla forma, alle curve di contrazione dei muscoli lisci. 3°) Spesso la contrattura come nella fig. 10, è ritmica, cioè la rispettiva curva si presenta ondulata, ciascuna ondulazione avendo a sua volta l'aspetto di una piccola contrazione elementare.

La veratrina, come una temperatura relativamente bassa, non fa che esaltare nel muscolo la sua attività tonica. Da ciò credo che dipenda anche

l'aumento in altezza delle contrazioni, che si osserva immediatamente dopo l'azione della veratrina. Più tardi questa deprime la contrazione clonica, anzi l'attività contrattile generale del muscolo. Azione analoga esercita sul muscolo l'ammoniaca (e altre sostanze).

Contrazioni multiple seguenti a stimoli unici. — In certi casi di esaltata eccitabilità naturale del preparato frenico-diaframmatico, stimoli unici, applicati per lo più al nervo (talora anche direttamente al muscolo), provocano contrazioni multiple, cioè contrazioni che differiscono profondamente da quelle finora descritte, perchè risultano da quattro o più contrazioni semplici seguentisi con un ritmo regolare sopra una linea di tonicità assai ele-

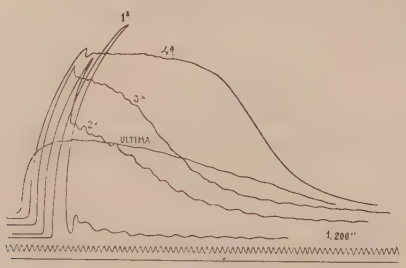


Fig. 10

Azione tardiva della veratrina. Dalla 1ª all'*ultima* di queste contrazioni, mentre appa-risce e sempre più si accentua la contrazione tonica, che qui anzi assume l'aspetto di contrattura ritmica, diminuisce l'altezza della contrazione clonica, che nell'*ultima* curva è interamente fusa con la contrattura.

vata, in guisa che la curva complessiva assume l'aspetto d'un tetano incompleto, come nella fig. 4. Io suppongo che questo fenomeno, del resto non nuovo perchè lo si può constatare in una quantità di tracciati ottenuti da varî autori ([18]), dipende da una moltiplicazione dell'eccitamento, prodotto dallo stimolo unico forte, nelle giunzioni neuro-muscolari del preparato ([19]).

Considerazioni generali sulla genesi della contrazione doppia. — Dopo quanto ho detto, mi pare che più non sia lecito di dubitare dell'esistenza, in ogni muscolo striato, di una vera duplicità funzionale, cioè di un'attività clonica e tonica. Per ogni condizione capace d'influire sull'attività contrattile esistono dei limiti, entro i quali la duplicità funzionale si manifesta con la comparsa di tipiche contrazioni doppie, e questi limiti variano per i varii preparati muscolari: ciò è vero per la temperatura, come per l'intensità degli stimoli, per la concentrazione degl'idrogenioni, per il peso onde il muscolo è caricato, per l'azione di speciali sostanze (veratrina ecc.).

La contrazione muscolare è quasi sempre doppia. Quando essa apparisce semplice, spesso ciò dipende da una fusione completa della contrazione

tonica con la clonica. Solo in certe condizioni (stimolo debolissimo unico, peso eccessivamente piccolo, certe temperature ecc.) la contrazione tonica non si manifesta. Ma in altre condizioni (temperatura eccessivamente bassa, periodo avanzato dell'azione della veratrina, della fatica ecc.) sembra dileguarsi invece la contrazione clonica.

Generalmente, quando una contrazione, prima apparentemente semplice, si trasforma in contrazione nettamente doppia, ciò è effetto dunque di dissociazione delle due contrazioni prima fuse, dipendente dal fatto che la condizione determinante tale dissociazione agisce diversamente sulle due attività, clonica e tonica, del muscolo, diversamente quanto alla intensità e alla velocità di svolgimento di esse.

Tra i fattori determinanti la forma della contrazione, principalissimo è la natura del muscolo, se cioè questo è un muscolo bianco o rosso ([20]). Essendo l'attività tonica massimamente sviluppata nei muscoli rossi, la frequenza con cui il preparato diaframmatico eseguisce contrazioni doppie dipende dall'essere il diaframma un muscolo rosso per eccellenza.

Le contrazioni più alte, che un muscolo compie in risposta a stimoli unici, si osservano quando in esso l'attività clonica e l'attività tonica sono eccitabili a un grado *optimum* e armonicamente; allora la contrazione tonica fa da « sostegno interno » alla contrazione clonica. Il detto grado *optimum* di sinergia delle due attività non può corrispondere alla massima dissociazione di esse. Solo nei muscoli abnormemente raffreddati o avvelenati con veratrina, la straordinaria altezza delle contrazioni può essere determinata, per così dire, da sovrapposizione della contrazione tonica sulla clonica.

L'ipotesi più soddisfacente che oggi possediamo, per spiegare la contrazione doppia in tutti i casi in cui si presenta, come anche i varii fenomeni alla medesima connessi, mi sembra che sia quella da me proposta ([21]); vale a dire, che la duplicità funzionale dei muscoli striati sia propria di ogni fibra muscolare, e però corrisponda alla duplicità strutturale di questa; e particolarmente, che l'attività clonica (contrazione primaria o rapida) sia localizzata nelle miofibrille, mentre l'attività tonica (contrazione secondaria o lenta, contrattura) sarebbe localizzata nel sarcoplasma.

BIBLIOGRAFIA

([1]) A. Fick, *Studien über elektrische Nervenreizung*. Arb. a. d. physiol. Labor. d. Würzbürger Hochschule. Würzburg 1872, pag. 65. tav. VI.

([2]) O. Funke, *Ueber den Einfluss der Ermüdung auf den zeitlichen Verlauf der Muskelthätigkeit*. Pflüger's Arch. VIII, pag. 213 (1874).

([3]) E. Tiegel, *Ueber Muskelcontractur im Gegensatz zu Contraction*. Pflüger's Arch. XIII, pag. 71 (1876).

(4) R. Tigerstedt, *Untersuchungen über die Latenzdauer der Muskelzuckung in ihrer Abhängigkeit von verschiedenen Variabeln.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1885, Suppl., pag. 111.

(5) A. Rollett, *Ueber die Veränderlichkeit des Zuckungsverlaufes quergestreifter Muskeln bei fortgesetzter periodischer Erregung und bei der Erholung nach derselben.* Pflüger's Arch. LXIV, pag. 507 (1896).

(6) G. F. Yeo and Th. Cash, *On the relation between the active phases of contraction and the latent period of skeletal muscle.* Journ. of physiol. IV, pag. 198 (1883).

(7) C. Lhoták von Lhota, *Untersuchungen über die Veränderungen der Muskelfunction in einer Kohlendioxydatmosphäre.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1902, Suppl., pag. 45.

(8) T. Graham Brown, *Der Einfluss des Nervensystems auf die Form der Zuckungskurve des Frosch-Gastrocnemius.* Pflüger's Arch. CXXV, pag. 491 (1908).

(9) P. Grützner, *Ueber physiologische Verschiedenheiten der Skelettmuskeln.* Bresl. ärztl. Zeit. 1883, n. 18 (22 Sept.); id., *Zur Anatomie und Physiologie der quergestreiften Muskeln*, Rec. zool. suisse I, n. 4, pag. 565 (20 Sept. 1884); id., *Zur Muskelphysiologie*, Bresl. ärztl. Zeit. 1886, n. 1 (15 Jan.).

(10) J. Carvallo et G. Weiss, *De l'action de la vératrine sur les muscles rouges et blancs du lapin.* Journ. de physiol. et de pathol. géner. I, pag. 1 (1899).

(11) H. Fischer, *Zur Physiologie der quergestreiften Muskeln der Säugetiere.* Pflüger's Arch. CXXV, pag. 541 (1908).

(12) J. Gad und J. F. Heymans, *Über den Einfluss der Temperatur auf die Leistungsfähigkeit der Muskelsubstanz.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol., 1890, Suppl., pag. 59.

(13) Fr. W. Fröhlich, *Ueber den Einfluss der Temperatur auf den Muskel.* Zeit. f. allg. Physiol. VII, pag. 401 (1908); IX, pag. 515 (1909); id., *Das Prinzip der scheinbaren Erregbarkeitssteigerung.* Zeit. f. allg. Physiol. IX, Sammelref., pag. 1 (1909).

(14) T. Gayda, *Influenza della temperatura sulla funzionalità dei muscoli isolati di riccio (Erinaceus europaeus).* Arch. di fisiol. XI, pag. 1 (1912). Ved. anche: A. Clopatt, *Zur Kenntnis des Einflusses der Temperatur auf die Muskelzuckung.* Skand. Arch. f. Physiol. X, pag. 249 (1900).

(15) O. Langendorff, *Untersuchungen am überlebenden Säugethierherzen.* Pflüger's Arch. LXI, pag. 291 (1895); A. Kanitz, *Auch für die Frequenz des Säugethierherzens gilt die R. G. T. Regel.* Pflüger's Arch. CXVIII. pag. 601 (1907); A. Herlitzka, *Ricerche sull'azione della temperatura sulla funzione del cuore.* Zeit. f. allg. Physiol. V, pag. 265 (1905); id., *Ricerche di termodinamica muscolare.* I Arch. di fisiol. X, pag. 501 (1912); G. Galeotti e F. Piccinini, *Influenza della temperatura sulla funzione del cuore.* Arch. di fisiol. VIII, pag. 237 (1910).

(16) B. Mostinsky, *Die Formgesetze der Veratrinkurve des Froschmuskels.* Arch. f. exp. Path. u. Pharm. LI, pag. 310 (1904). Ved. anche: G. Quagliariello, *Beiträge zur Muskelphysiologie: Wirkung des Veratrins auf die quergestreiften Muskeln von Warmblütern.* Zeit. f. Biol. LIX, pag. 441 (1913); F. Bottazzi, *Ueber die Wirkung des Veratrins und anderer Stoffe auf die quergestreifte, atriale und glatte Musculatur. (Beiträge zur Physiologie des Sarkoplasmas).* Arch. f. (Anat. u.) Physiol., 1901, pag. 377.

(17) F. Bottazzi, *Contributi alla fisiologia dei muscoli: La contrazione dei muscoli fetali.* Mélanges biologiques, livre dédié à Ch. Richet. Paris 1912, pag. 485. Ved. anche: F. W. Ellis, *The development of double refraction in the muscles of fish embryos.* Amer. Journ. of physiol. XXXI, pag. 370 (1913); E. Meyer, *Sur l'innervation respiratoire et l'excitation des nerfs et des muscles chez le nouveau-né.* Arch. de physiol. norm. et path. 1894, pag. 476. (Ved. anche, per i muscoli di bambini neonati, una pubblicazione di Patrizi e Mensi, Giorn. d. R. Accad. med. di Torino, 1894, pag. 61).

(18) F. S. Locke, *Die Wirkung der physiologischen Kochsalzlösung auf quergestreifte Muskeln.* Pflüger's Arch. LIV, pag. 501 (1893); Dr. Carlslaw, *Die Beziehungen zwischen der Dichtigkeit und den reizenden Wirkungen der NaCl-Lösungen*, Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1887, pag. 429; A. Durig, *Ueber die elektrische Wirkungen des wasserarmen Muskels.* Pflüger's Arch. XCVII, pag. 457 (1903); E. Th. von Brücke, *Ueber die Beziehungen zwischen Aktionsstrom und Zuckung des Muskels im Verlaufe der Ermüdung.* Pflüger's Arch. CXXIV, pag. 215 (1908); R. Dittler, *Ueber die Innervation des Zwerchfelles als Beispiel einer tonischen Innervation.* Pflüger's Arch. CXXX, pag. 400 (1909); J. Burdon-Sanderson, *The electrical response to stimulation of muscle, and its relation to the mechanical response.* Journ. of physiol. XVIII, pag. 117 (1895); F. Buchanan, *The electrical response of muscle in different kinds of persistent contraction.* Journ. of physiol. XXVII, pag. 95 (1901); S. Garten, *Ueber das elektromotorische Verhalten von Nerv und Muskel nach Veratrinvergiftung.* Pflüger's Arch. LXXVII, pag. 485 (1899); id., *Ueber rhythmische elektrische Vorgänge im quergestreiften Skelettmuskel.* Abhandl. d. math.-physik. Klasse d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. XXVI, pag. 331 (1901); M. Philippson et G. Hannevart, *L'action des acides et des alcalis sur la contraction des muscles.* Bull. de la Soc. roy. d. sc. médic. et nat. de Bruxelles, n. 8, octobre 1912.

(19) F. Bottazzi, *L'attività nervosa e i processi elementari su cui si fonda.* (Discorso letto il 15 novembre 1913 per la solenne inaugurazione dell'anno accademico 1913-14 nella R. Università di Napoli). Annuario della R. Università degli studî. Napoli 1914. (Ved. anche: Scientia XV, n. XXXV-3, 1914); H. Henkel, *Rhythmische Entladungen der Nervenzentra.* Zeit. f. allg. Physiol. XV, pag. 1 (1913); C. Foà, *Ricerche sul ritmo degli impulsi motori che partono dai centri nervosi.* Zeit. f. allg. Physiol. XIII, pag. 247 (1912).

(20) E. Paukul, *Die Zuckungsformen von Kaninchenmuskeln verschiedener Farbe und Structur.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1904, pag. 100.

(21) F. Bottazzi, *The oscillations of the auricular tonus in the batrachian heart with a theory on the function of sarcoplasma in muscular tissues.* Journ. of physiol. XXI, pag. 1 (1897).

Chimica-fisica. — *La materia allo stato sopraffuso.* III. *Viscosità e conducibilità elettrica delle sostanze sopraffuse.* Memoria del Socio R. Nasini, di A. Bresciani e F. Zacchini.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Meccanica. — *Estensione della soluzione del Sundman dal caso di corpi ideali, al caso di sferette elastiche omogenee.* Nota di G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Introduzione. — Oggetto della presente Nota.

1. Il Sundman, nella sua Memoria sul problema di tre corpi (1), suppone esplicitamente che si tratti di corpi ideali, cioè tali da essere soggetti. anche nell'urto, *soltanto* alla forza d'attrazione newtoniana.

« Il va sans dire — egli scrive (2) — que lorsque nous parlons de la « continuation du mouvement après un choc, nous supposons qu'il s'agisse « de corps idéaux » ecc.

Data l'importanza dello studio del Sundman, riesce quindi assai interessante di esaminare se il risultato possa estendersi al caso di sferette materiali omogenee e perfettamente elastiche.

Vedremo, nella presente Nota, che la risposta sarà affermativa.

2. Più esattamente immaginiamo tre sfere $S_1\,S_2\,S_3$, materiali, omogenee, di massa $m_1\,m_2\,m_3$ e di raggio r; le quali si attirino secondo la legge di Newton.

Supponiamo, inoltre, che esse (per usare il linguaggio degli antichi) siano perfettamente elastiche: cioè tali che, nell'urto, non abbia luogo alcuna perdita di forza viva; ciò che in natura si verifica con approssimazione per l'acciaio, l'avorio ecc.

Indichiamo con $C_1\,C_2\,C_3$ le traiettorie che i centri di $S_1\,S_2\,S_3$ descrivono dall'istante iniziale $t = 0$ sino a $t = \infty$. Siano $K_1\,K_2\,K_3$ le traiettorie dei corrispondenti punti ideali del Sundman; cioè le traiettorie di tre punti ideali di massa $m_1\,m_2\,m_3$, abbandonati in condizioni iniziali identiche a quelle dei centri di $S_1\,S_2\,S_3$ (3).

Chiamiamo con $X_i\,Y_i\,Z_i$ le coordinate del centro della sfera S_i; e con $x_i\,y_i\,z_i$ quelle del corrispondente punto ideale di massa m_i, nello stesso istante t.

(1) Karl F. Sundman, *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math., tom. 36.

(2) Op. cit., pag. 141.

(3) Supponiamo, ancora, che, nell'istante iniziale, le tre sfere non abbiano alcun moto di rotazione; di maniera che il momento della quantità di moto, e la forza viva del sistema $S_1\,S_2\,S_3$ siano uguali a quelli del corrispondente sistema ideale del Sundman, $m_1\,m_2\,m_3$.

Supponiamo, che data una quantità positiva ε, estremamente piccola, si abbia sempre

$$(1) \qquad \left| \sqrt{(X_i - x_i)^2 + (Y_i - y_i)^2 + (Z_i - z_i)^2} \right| < \varepsilon \; ; \qquad (i = 1, 2, 3)$$

io dirò allora, brevemente, che le traiettorie $C_1\,C_2\,C_3$ si discostano a meno di ε da quelle $K_1\,K_2\,K_3$ dei corrispondenti punti ideali.

Ciò posto, nella presente Nota io dimostrerò che, qualunque siano gli urti, hanno luogo le tre eguaglianze:

$$(2) \qquad \lim_{r=0} C_i = K_i \; ; \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Adoperando allora il linguaggio ordinario, potremo dire che, se le sfere S_i sono di raggio infinitamente piccolo, esse descrivono, non ostante gli urti, le stesse traiettorie dei corrispondenti punti ideali.

La limitazione del Sundman apparirà quindi superflua.

Principî su cui poggia la ricerca.

3. Per maggiore chiarezza, faccio procedere il seguente

Lemma. — Consideriamo le tre sfere di raggio r, di cui sopra abbiamo parlato.

Consideriamo un intervallo finito di tempo:

$$(3) \qquad 0 \leqq t \leqq T \, ,$$

e supponiamo di avere costruito nello spazio gli archi $c_{1T}\,c_{2T}\,c_{3T}$, $k_{1T}\,k_{2T}\,k_{3T}$, descritti in questo intervallo dai centri delle tre sfere e dai punti corrispondenti.

Io dico che, essendo T finito, è possibile di assegnare al raggio r delle tre sfere un valore *diverso da zero*, e tale che esse si urtino *soltanto* allorchè la traiettoria del centro dell'una passa *rigorosamente* per il centro dell'altra.

Dimostrazione. — Studiamo le relazioni intercedenti tra k_{1T} e k_{2T}; il lettore intende che ragionamenti analoghi potrebbero ripetersi per le coppie $k_{2T}\,k_{3T}$, $k_{3T}\,k_{1T}$. Trascurando, per ora, il caso (che esamineremo da parte) che gli archi $k_{1T}\,k_{2T}$ abbiano qualche tratto in comune, essi, in generale, si taglieranno in un certo numero di punti P, Q, R ecc.

Di più esisteranno, su k_{1T} e k_{2T}, delle coppie di punti $G_1\,G_2$, $H_1\,H_2$, $L_1\,L_2$ ecc., tali che le distanze $G_1\,G_2 = \lambda_g$, $H_1\,H_2 = \lambda_h$, $L_1\,L_2 = \lambda_l$ ecc. siano *minime* (non nulle), rispetto alle mutue distanze dei punti immediatamente precedenti e seguenti.

Per il nostro scopo dobbiamo considerare come *una sola* tutte quelle coppie $G_1\,G_2$, $N_1\,N_2$ i cui punti presentino distanze uguali, $\lambda_g = \lambda_n$ [1] ecc.

[1] Quindi, se k_{1T} e k_{2T} presentassero nel loro percorso, ad es., due archi circolari concentrici, le infinite coppie di eguale distanza, ivi esistenti, dovrebbero, per il nostro scopo, essere considerate come una coppia sola.

Analogamente dobbiamo considerare P come *un solo* punto comune, anche se in P i due archi presentassero un contatto dell'ordine n. Poste queste convenzioni, data la natura delle traiettorie, ed essendo T finito, è facile il dimostrare che i punti d'intersezione P, Q, R ecc., e le coppie di distanza minima non nulla $G_1 G_2$, $H_1 H_2$, $L_1 L_2$ ecc., sono in numero finito.

Ciò posto, consideriamo la successione:

$$\lambda_g , \lambda_h , \lambda_l , \ldots ; \tag{4}$$

essa è formata da un numero finito di termini, tutti positivi e diversi da zero: esisterà perciò tra essi un termine λ_i, non nullo, minore o, al più, eguale agli altri.

Se allora immaginiamo di sostituire i corpi ideali del Sundman con sferette omogenee di raggio r, noi saremo certi che non vi sarà alcun urto nei punti di $G_1 G_2$ ecc., purchè si scelga il raggio r in modo da soddisfare all'ineguaglianza

$$2r < \lambda_i . \tag{5}$$

Consideriamo ora i punti d'intersezione P, Q, R ecc., e siano $t_{1p}\, t_{2p}$, $t_{1q}\, t_{2q}$, $t_{1r}\, t_{2r}$, i tempi in cui vi passano i due corpi ideali del Sundman, di massa $m_1\, m_2$.

Poniamo:

$$|t_{1p} - t_{2p}| = \tau_p \quad ; \quad |t_{1q} - t_{2q}| = \tau_q \text{ ecc. ecc.} \tag{6}$$

Dividiamo le τ in due classi, ponendo nella prima quelle, tra esse, che sono diverse da zero (ad es.: τ_p , τ_r , τ_s); nella seconda quelle uguali a zero (per es.: $\tau_q \tau_u$ ecc. ecc.).

Per ciò che si riferisce alla prima classe:

$$\tau_p , \tau_r , \tau_s , \ldots \tag{7}$$

risultando essa composta di un numero finito di termini tutti positivi e non nulli ne esisterà uno, per es. τ_z, diverso da zero, minore o, al più, eguale agli altri.

Sostituendo i corpi ideali $m_1\, m_2$ con le nostre sfere $S_1 S_2$, noi potremo allora evitare gli urti corrispondenti alle intersezioni P, R ecc., purchè diamo loro un raggio sufficientemente piccolo, ma finito.

Per le intersezioni della seconda classe Q, U ecc., avviene il contrario. Qui l'urto ha sempre luogo comunque sia piccolo il raggio r. Ma, per questi punti, la traiettoria del centro della sfera S_1, supposta prolungata, passa rigorosamente per il centro della sfera S_2. Infatti, k_{1T} e k_{2T} s'intersecano in Q, U ecc.; e si ha $t_{1q} = t_{2q}$, $t_{1u} = t_{2u}$, ecc.

Supponiamo, ora, che k_{1T} e k_{2T} abbiano un tratto comune φ. Per gli archi residui $k_{1T} - \varphi$ e $k_{2T} - \varphi$, ripeteremo ciò che è stato detto. Quanto

al tratto φ, se esso viene percorso in tempi diversi dai due mobili, ciò non reca alcun danno. In caso contrario, se su φ hanno luogo urti, questi soddisfano certamente alla nostra asserzione, percorrendo i due centri la stessa traiettoria. Il lemma è dunque provato. c. d. d.

Teorema fondamentale.

4. Dimostriamo ora il seguente

Teorema. — Consideriamo gli archi di traiettoria

$$c_{1T}\, c_{2T}\, c_{3T} \ , \ k_{1T}\, k_{2T}\, k_{3T}$$

descritti nell'intervallo $0 \leqq t \leqq T$ dai centri delle nostre sfere $S_1\, S_2\, S_3$, e dai corrispondenti corpi ideali del Sundman. Sia ε una quantità arbitraria. piccola a piacere. Io dico che, se T è finito, è possibile di assegnare alle sfere $S_1\, S_2\, S_3$ un raggio r, *diverso da zero*, e tale che $c_{1T}\, c_{2T}\, c_{3T}$ si discostino da $k_{1T}\, k_{2T}\, k_{3T}$ a meno di ε.

Dico, di più, che, mantenendo fisso T, e facendo tendere r a zero, si ha:

$$\lim_{r=0} \varepsilon = 0. \tag{8}$$

Dimostrazione. — Cominciamo intanto dal ricordare che, nell'istante iniziale, le sfere $S_1\, S_2\, S_3$ non hanno, per ipotesi, alcun moto di rotazione. Notiamo, allora, che, essendo per es. S_1 omogenea, le forze d'attrazione agenti sui punti di S_1 si ridurranno ad una risultante unica e passante per il suo centro. Se la S_1 viene ad urtarsi con S_2, e supponiamo la superficie senza attrito, la reazione F, esercitata da S_2 su S_1, sarà perpendicolare al piano tangente comune, condotto per il punto di contatto: la F passerà perciò per i due centri. Le nostre sfere quindi non acquisteranno mai alcun moto di rotazione: e noi non dovremo perciò temere quei fenomeni perturbatori, dovuti a moti rotativi, i quali potrebbero modificare le leggi dell'urto, e immagazzinare una parte dell'energia cinetica del sistema.

Ciò posto, scegliamo r in modo tale che nell'intervallo $0 \leqq t \leqq T$ l'urto avvenga *soltanto* in quei punti in cui la traiettoria del centro di una sfera passa *rigorosamente* per il centro dell'altra. Essendo T finito, a norma del precedente lemma, il valore di r risulterà finito e *diverso da zero.*

Sia t_1^* l'istante in cui avviene il primo urto; ad es., tra la sfera S_1 e la sfera S_2. Consideriamo il moto del centro di S_2, rispetto al centro di S_1 prendendo, pel momento, quest'ultimo punto come origine, e servendoci di un piano mobile α, passante per l'origine e per la tangente alla traiettoria relativa del centro di S_2.

Chiamiamo con ϱ il raggio vettore (distanza tra i centri delle due sfere), e con ϑ l'angolo che esso forma con una retta tracciata sul piano mobile α. Sia β l'angolo d'incidenza (contato dalla congiungente i due centri) sotto cui avviene l'urto tra le sfere. Esso sarà uguale all'angolo che, nell'istante t_1^*, il raggio vettore ϱ forma con la tangente alla traiettoria relativa del centro di S_2. Ammettendo quest'ultima una tangente ben determinata, avremo, secondo una formola notissima,

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{tg}\beta = \left[\frac{\varrho}{\frac{d\varrho}{d\vartheta}}\right]_{t=t_1^*} = \left(\varrho\,\frac{\frac{d\vartheta}{dt}}{\frac{d\varrho}{dt}}\right)_{t=t_1^*}.$$

Ma si ha:

$$\text{(10)} \qquad \varrho_{t=t_1^*} = 2r.$$

Facciamo tendere a zero il raggio r delle due sfere. Per il nostro lemma, passando la traiettoria di S_2 rigorosamente per il centro di S_1, *l'urto avrà sempre luogo*. Solamente, t_1^* tenderà ad un valore limite t_1; $\frac{d\vartheta}{dt}$ si conserverà finita per un noto teorema, mentre $\frac{d\varrho}{dt}$ tenderà all'infinito. Avremo quindi

$$\text{(11)} \qquad \lim_{r=0} (\operatorname{tg}\beta) = 0.$$

In altre parole, tendendo a zero il raggio delle sfere, S_1 S_2, l'urto nell'istante t_1^*, tende a divenire normale. Ciò posto, tornando a riferirci ad assi fissi, chiamiamo con v_1 e V_1 la velocità del centro di S_1 immediatamente prima e dopo l'urto: con v_2 e V_2 le quantità analoghe per S_2.

Se l'urto fosse esattamente normale, non essendovi, per ipotesi, alcuna perdita di forza viva, noi avremmo:

$$\text{(12)} \qquad V_2 = \frac{(m_2 - m_1)\,v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Ora io chiamo con w la velocità del baricentro del sistema S_1, S_2: ho allora, immediatamente prima e dopo l'urto:

$$\text{(13)} \qquad w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2},$$

da cui ricavo:

$$\text{(14)} \qquad \frac{V_2}{v_2} = \frac{2w}{v_2} - 1.$$

Facciamo decrescere a zero il raggio r delle sfere, mantenendo fisse le loro masse. La velocità con cui esse si urtano tenderà all'infinito, mentre

la velocità w del baricentro del sistema rimarrà finita; ho allora, dalla (14),

$$\lim_{r=0}\left(\frac{V_2}{v_2}\right) = -1; \tag{15}$$

ed analogamente:

$$\lim_{r=0}\left(\frac{V_1}{v_1}\right) = -1. \tag{16}$$

Facendo quindi tendere a zero il raggio r delle sfere, l'urto tende a divenire normale; e la velocità di rimbalzo tende a divenire uguale, a meno del segno, a quella primitiva. Al limite, avremo quindi per l'urto le stesse leggi dei corpi ideali del Sundman. Ciò posto: in tutto l'intervallo compreso fra $t = 0$ e $t = t_1^*$, in cui avviene il primo urto, le traiettorie dei centri di $S_1\,S_2\,S_3$ sono identiche a quelle dei corrispondenti corpi ideali. Ma, come abbiamo visto, è possibile di scegliere r tanto piccolo che, immediatamente dopo l'urto, le condizioni dei centri delle sfere $S_1\,S_2\,S_3$ *siano vicine, quanto ci piace, a quelle dei corpi ideali corrispondenti.* Allora, essendo le coordinate funzioni continue delle condizioni iniziali, in tutto l'intervallo $t_1^* \leqq t < t_2^*$, compreso tra il primo e il secondo urto, le traiettorie dei centri delle tre sfere $S_1\,S_2\,S_3$ saranno non più identiche, *ma prossime, quanto vogliamo*, a quelle dei corrispondenti corpi ideali. Ora, T è finito: quindi nell'intervallo $0 \leqq t \leqq T$ non può aver luogo che un numero *finito* di urti. Il nostro teorema risulta perciò provato. c. d. d.

Dimostrazione delle (2). - Tendendo r a zero, le traiettorie $C_1\,C_2\,C_3$ convergono — sebbene non uniformemente — verso $K_1\,K_2\,K_3$.

Conclusione.

5. Indichiamo, come è stato detto in principio, con $C_1\,C_2\,C_3$, $K_1\,K_2\,K_3$ le intere traiettorie descritte da $t = 0$ a $t = \infty$, dai centri delle nostre sfere, e dai corpi ideali corrispondenti. Sia E_1 un punto qualsiasi, appartenente alla traiettoria C_i; e sia $\bar{t}_i$ l'istante in cui vi giunge il centro della sfera S_i. Nello stesso istante il corpo ideale m_i giungerà al punto F_i sulla K_i. Facciamo tendere r a zero. Essendo $\bar{t}_i$ finito, per quanto è stato detto, avremo, indicando con $\overline{E_i F_i}$ la distanza dei due punti:

$$\lim_{r=0} \overline{E_i F_i} = 0. \tag{17}$$

Ma E_i è un punto generico, preso a caso, sulla C_i. Ripetendo il ragionamento per ogni punto al finito, avremo:

$$\lim_{r=0} C_i = K_i. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{18}$$

Le (2) sono quindi dimostrate. Domandiamoci, però, se C_i converge verso K_i in modo uniforme. È facile vedere che, in generale, la risposta sarà negativa. In altre parole, a differenza di ciò che avviene per le c_{iT}, ora è, in *generale*, impossibile trovare un valore di r, *diverso da zero*, per cui le C_i si discostino a meno di ε dalle K_i. Per dimostrarlo, basta osservare che, in questo caso, essendo l'intervallo di tempo infinito, le successioni (4) e (7) sono in generale composte d'infiniti termini, e possono avere per limite inferiore lo zero

In casi particolari può però aversi la convergenza uniforme. Un esempio importante, in cui questo fatto si verifica, si ha quando le orbite sono periodiche. Infatti, chiamando con Ω il periodo, basta allora studiare il fenomeno nell'intervallo $0 \leqq t \leqq \Omega$. Vale quindi il teorema del n. 4. Enunciando le (18) col linguaggio ordinario, giungiamo al risultato seguente, già annunziato in principio:

« *Le traiettorie descritte da tre sferette perfettamente elastiche, omogenee, di raggio infinitamente piccolo, le quali si attirino secondo la legge di Newton, sono identiche, non ostante gli urti, a quelle dei corrispondenti corpi ideali del Sundman. La limitazione posta dal Sundman sulla natura dei suoi corpi, appare quindi superflua* ».

Matematica. — *Risoluzione geometrica del problema di Moutard sulla costruzione delle equazioni di Laplace ad integrale esplicito.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Il problema della costruzione delle equazioni di Laplace, cioè del tipo

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial \varrho_1 \, \partial \varrho_2} + a(\varrho_1, \varrho_2) \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} + b(\varrho_1, \varrho_2) \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} + c(\varrho_1, \varrho_2)\, x = 0,$$

che ammettono un integrale esplicito (cioè per le quali la successione di trasformate di Laplace si chiude dalle due parti) è stato posto e risoluto dal Moutard, in una celebre Memoria, perduta, prima che fosse stampata, nel 1871: una parte di essa, quella relativa alle equazioni ad invarianti uguali, è stata ricomposta e resa nota dal Moutard nel 1878 (1).

Il Darboux, nelle sue classiche « Leçons sur la théorie générale des surfaces », ha risoluto per via analitica il problema di Moutard; con metodo che presumibilmente si avvicina di più a quello tenuto dal Moutard

(1) Journal de l'École polytechnique, XLV cahier, p. 1.

[servendosi cioè della teoria delle trasformate differenziali e integrali, singolari, della (1)] ha raggiunto lo stesso scopo il prof. Nicoletti (1).

Io mi propongo qui di risolvere il problema di Moutard con sole considerazioni geometriche; esse gettano, mi sembra, una luce d'evidenza e di intimo significato nell'eleganza delle formole del Darboux. In particolare mi permetto di rilevare la costruzione delle equazioni ad invarianti uguali fatta col solo sussidio di un bel teorema di Koenigs, del quale colgo l'occasione per dare una dimostrazione di carattere proiettivo.

2. È noto il significato geometrico della (1): se si considerano $n+1$ sue soluzioni indipendenti come coordinate proiettive omogenee di un punto in uno S_n, questo punto descrive, al variare di ϱ_1, ϱ_2, un doppio sistema coniugato rappresentato, sulla superficie luogo Φ, dalle equazioni $\varrho_2 = \text{cost.}$ (curve caratteristiche ϱ_1) e $\varrho_1 = \text{cost.}$ (curve ϱ_2). La congruenza delle tangenti alle curve ϱ_1 (o ϱ_2) di Φ ha (oltre Φ) una seconda superficie focale che rappresenta una delle trasformate di Laplace Φ_1 (o Φ_{-1}) della (1).

Perchè la successione delle trasformate della (1) sia terminata da una parte almeno occorre e basta che sul nostro modello iperspaziale si verifichi una delle circortanze seguenti (2):

gli spazî osculatorî S_k alle caratteristiche di un sistema nei punti di una caratteristica dell'altro sistema passano per un punto; in tal caso la successione si chiude da una parte dopo k trasformazioni, secondo il caso generale;

le caratteristiche di un sistema sono contenute in spazî S_k, che riescono osculatori ad una curva; la successione si chiude pure dopo k trasformazioni in un senso, secondo il caso di Goursat;

se gli S_k dell'ultimo caso passano per uno spazio fisso S_μ, la successione si chiude dopo $k-\mu$ trasformazioni; si ha il caso misto.

3. Proponiamoci di costruire tutte le successioni di Laplace terminate in tutt'e due i sensi secondo il caso di Goursat.

Siano le caratteristiche di un sistema di Φ immerse negli S_h osculatori ad una curva γ_1, e le caratteristiche dell'altro sistema in S_k osculatori ad una curva γ_2. È chiaro che Φ è il luogo dei punti d'intersezione di un S_h osculatore a γ_1 con un S_k osculatore a γ_2, e che quindi Φ e tutta la successione sta in un S_n ove $n = h+k$. Viceversa: date due curve ad arbitrio in S_n, il luogo del punto d'intersezione di un S_h generico osculatore alla prima e di un S_k osculatore alla seconda è sempre una superficie Φ

(1) Rend. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. VI (1 sem. 1897), pp. 307-314 e pp. 334-341. Per la teoria generale delle trasformazioni della (1) vedasi pure del Nicoletti: *Sulla trasformazione delle equazioni lineari del secondo ordine con due variabili indipendenti* (Ann. Scuola norm. sup. di Pisa, 1897).

(2) Vedasi la mia Memoria: *Sull'equazione di Laplace* (Rend. Circ. mat. di Palermo, tom. XXXIV, 1912), parte I.

con un doppio sistema coniugato? Per vederlo, basterà dimostrare che le tangenti a due curve segate su due S_h, infinitamente vicini, dagli S_k, sono incidenti a coppie. Ma ciò è chiaro se si pensa che una tangente ad una curva di S_h è segata dallo S_{k+1} congiungente due S_k infinitamente vicini: le due tangenti richieste sono segate dallo S_{k+1} su due S_h infinitamente vicini, cioè stanno nello S_{k+1} loro congiungente. Appartenendo ad un S_{h+1} e ad un S_{k+1} di S_n ($n = h + k$), stanno nel loro piano d'intersezione: quindi effettivamente s'incontrano. Dunque:

Per costruire la più generale successione di Laplace chiusa dalle due parti secondo il caso di Goursat, basta considerare due curve qualsiansi di S_n: *il luogo del punto d'intersezione di un* S_h *osculatore alla prima e di un* S_k *osculatore all'altra, con la condizioue* $h + k = n$, *è una superficie* Φ *della serie. Per ottenere tutte le superficie della successione, basta far variare* h *da* 0 *ad* n [1].

Nel caso che una o tutt'e due le curve scelte degenerino, la successione si chiude da una o da tutt'e due le parti, presentando il caso misto.

4. Per costruire le successioni più generali chiuse da tutt'e due le parti secondo il caso generale, consideriamo due curve γ_1, γ_2 qualsiansi in S_n, fra loro in posizione generica, e consideriamo inoltre gli S_{h+k+1} congiungenti S_h osculatori alla prima curva, con S_k osculatori alla seconda, e tagliamo poi la configurazione, così ottenuta, di ∞^2 S_ν ($\nu = h + k + 1$), con un $S_{n-\nu}$. Si ottiene una superficie Φ con un doppio sistema coniugato, la cui successione di Laplace è chiusa da tutt'e due le parti secondo il caso generale. Infatti, se in un punto di γ_1 si considera, oltre allo S_h, lo S_ν osculatore, questo taglia $S_{n-\nu}$ in un punto per il quale vengono a passare gli S_{k+1} osculatori alle curve ϱ_1 di Φ nei punti di una curva ϱ_2. Altrettanto avviene scambiando l'ufficio delle due curve.

5. Interpretiamo analiticamente questi risultati.

Le due curve γ_1, γ_2 del n. prec. siano individuate proiettivamente dalle due equazioni lineari omogenee, d'ordine $n + 1$,

$$(2) \qquad \alpha_{n+1} x + \alpha_n x^{(1)} + \cdots + \alpha_0 x^{(n+1)} = 0 \quad \left(x^{(h)} = \frac{d^h x}{d\varrho_1^h}\right)$$

$$(3) \qquad \beta_{n+1} y + \beta_n y^{(1)} + \cdots + \beta_0 y^{(n+1)} = 0 \quad \left(y^{(k)} = \frac{d^k y}{d\varrho_2^k}\right):$$

[1] Se le curve che terminano la successione dalle due parti coincidono, la superficie Φ è luogo delle intersezioni degli S_h e degli S_k osculatori ad una stessa curva. In particolare, per $n = 4$, $h = 2$ e $k = 4$; e se la curva è la quartica razionale normale, si ha come superficie Φ del tipo esaminato la più generale proiezione in S_4 della superficie di Veronese già incontrata dal prof. Castelnuovo (Atti Ist. veneto, ser. 7ª, tom. II, 1889) come superficie singolare di un sistema lineare ∞^2 di complessi lineari di rette, e dal prof. Fano come superficie con ∞^3 trasformazioni proiettive in sè (Mem. Acc. di Torino, s. 2ª, tom. XLVI, 1896).

i coefficienti della prima essendo funzioni della sola ϱ_1; quelli della seconda, della sola ϱ_2. S'intende che i punti di γ_1 o di γ_2 hanno per coordinate proiettive omogenee $n+1$ soluzioni indipendenti della (2) o della (3). Lo spazio congiungente un S_h osculatore a γ_1 e un S_k osculatore a γ_2 è individuato dai punti $x, x^{(1)}, \dots, x^{(h)}, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$. Se si taglia la configurazione di Laplace [1] degli S_{h+k+1} con lo $S_{n-\nu}$ di equazioni $x_1 = 0, \dots, x_\nu = 0$, si ha una superficie Φ, e le coordinate dei suoi punti si estraggono dalla matrice:

$$(4)\qquad \begin{Vmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_\nu & x_{\nu+1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n+1} \\ x_1^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & x_\nu^{(1)} & x_{\nu+1}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n+1}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(h)} & \cdot & \cdot & \cdot & x_\nu^{(h)} & x_{\nu+1}^{(h)} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n+1}^{(h)} \\ y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & y_\nu & y_{\nu+1} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{n+1} \\ y_1^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & y_\nu^{(1)} & y_{\nu+1}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{n+1}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(k)} & \cdot & \cdot & \cdot & y_\nu^{(k)} & y_{\nu+1}^{(k)} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{n+1}^{(k)} \end{Vmatrix} \qquad (\nu = h + k + 1)$$

tenendo fisse le prime ν colonne. *Questi determinanti sono soluzioni della più generale equazione di Laplace la cui successione termina dalle due parti secondo il caso generale. Le equazioni della successione si ottengono dando ad h tutt'i valori da* 0 *ad n* [2].

Analogamente si procederebbe negli altri casi di chiusura.

6. Consideriamo il caso in cui la (1) abbia gli invarianti [3]

$$H = \frac{\partial a}{\partial \varrho_1} + ab - c \quad , \quad K = \frac{\partial b}{\partial \varrho_2} + ab - c$$

uguali. La caratteristica geometrica di questo fatto è espressa dal teorema di Koenigs, che ora dimostriamo [4]. Sia x un punto generico di Φ: i punti

[1] Cfr. la mia Nota: *Sur les configurations de Laplace* (Compt. rend. Acad. de France, tom. 156, février 1913).

[2] Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. II (1889), ch. VI, n. 385.

[3] Darboux, loc. cit., vol. II, ch. II, n. 326; ho adoperato per gli invarianti le lettere maiuscole, invece che le minuscole come nel Darboux, per evitare confusioni con quel che precede e segue.

[4] Darboux, loc. cit., vol. IV, pag. 878. La dimostrazione del Darboux è d'indole metrica; una dimostrazione proiettiva era stata annunziata da Tzitzéica, ma, per quanto so, non è stata pubblicata.

che da esso si ottengono con la trasformazione di Laplace (nel piano tangente in x a Φ) hanno le coordinate

$$x_i^{-1} = \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_1} + b x_i \quad , \quad x_i^1 = \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_2} + a x_i .$$

Scegliamo questi tre punti come vertici di un triangolo fondamentale per un sistema di coordinate proiettive, e precisamente (nel piano tangente considerato) sia

$$x^{-1}(1,0,0) \; ; \; x(0,1,0) \; ; \; x^1(0,0,1).$$

Segue, da ciò, che le derivate di x_i sono (in x):

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0 & \dfrac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} = 1 & \dfrac{\partial x_1}{\partial \varrho_2} = 0 \\ x_2 = 1 & \dfrac{\partial x_2}{\partial \varrho_1} = -b & \dfrac{\partial x_2}{\partial \varrho_2} = -a \\ x_3 = 0 & \dfrac{\partial x_3}{\partial \varrho_1} = 0 & \dfrac{\partial x_3}{\partial \varrho_2} = 1. \end{array}$$

Una conica che tocchi i lati del triangolo fondamentale nei vertici x^{-1} e x^1 ha un'equazione del tipo $x_1 x_3 - \lambda x_2^2 = 0$.

Vogliamo determinare λ in modo che la conica riesca osculatrice in x^{-1} alla curva ϱ_2 di Φ_{-1} che vi passa. Detta conica deve perciò contenere il punto

$$X = x^{-1} + \frac{\partial x^{-1}}{\partial \varrho_2} d\varrho_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x^{-1}}{\partial \varrho_2^2} d\varrho_2^2 ,$$

le cui coordinate si calcolano subito servendosi dei valori trovati per le derivate prime ed eliminando le successive per mezzo della (1) stessa; e si trova:

$$X_1 = 1 + \cdots \; ; \; X_2 = K\, d\varrho_2 + \cdots \; ; \; X_3 = \frac{1}{2} K\, d\varrho_2^2 ;$$

ove i ... indicano termini d'ordine superiore, in $d\varrho_2$, a quelli scritti. L'equazione della conica richiesta è perciò:

$$x_1 x_3 - \frac{1}{2K} x_2^2 = 0 .$$

La conica analoga osculatrice in x^1 alla curva ϱ_1 che vi passa (e tangente in x^{-1} alla curva ϱ_2) ha l'equazione

$$x_1 x_3 - \frac{1}{2H} x_2^2 = 0 .$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una conica osculatrice in x^{-1} alla curva ϱ_2 e in x^1 alla curva ϱ_1, è che gli invarianti della (1) *siano uguali*: $H = K$.

Questo è il teorema di Koenigs.

7. Occupiamoci ora della *costruzione di tutte le equazioni ad invarianti uguali con integrale esplicito.*

Osserviamo, subito, che, essendo ad invarianti uguali l'equazione, la successione termina da tutte due le parti della (1) dopo lo stesso numero di trasformazioni e presentando lo stesso caso. Supponiamo sia quello di Goursat. Come s'è detto al n. 3, la superficie Φ che si considera è luogo dei punti d'intersezione degli S_h e degli S_k osculatori a due curve di un S_{h+k}; poichè nel nostro caso $h = k$, Φ va considerata in uno spazio di dimensione pari, $S_n = S_{2h}$. Bisogna ora sfruttare, per caratterizzare Φ, le due condizioni: che le caratteristiche di Φ sono in S osculatori a due curve γ_1, γ_2, e che esiste la conica di Koenigs in ogni suo piano tangente.

Dalla prima condizione segue che le curve ϱ_2 su Φ_1 appartengono agli S_{h-1} osculatori alla curva γ_1 (su cui varia soltanto ϱ_1), e le curve ϱ_1 di Φ_{-1} appartengono agli S_{h-1} osculatori a γ_2 (su cui varia soltanto ϱ_2). Per sfruttare la seconda condizione, cerchiamo il luogo della conica di Koenigs al variare di x su Φ. Sia M il punto di γ_1 il cui S_h osculatore contiene la curva ϱ_2 passante per x, e il cui S_{h-1} osculatore contiene la curva ϱ_2 (di Φ_1) passante per x^1, ed N il punto analogo su γ_2.

Consideriamo una qualunque ipersuperficie quadrica Q passante per gli S_{h-1} osculatori a γ_1 in tre punti infinitamente vicini M, M', M'', e tangente alla curva ϱ_2 di Φ_{-1} in x^{-1}. Il piano tangente in x a Φ sega Q in una conica che è osculatrice in x^1 a ϱ_1 (di Φ_1) e tangente in x^{-1} a ϱ_2 (di Φ_{-1}). Per il teorema di Koenigs detta conica, quindi Q, è osculatrice in x^{-1} a ϱ_2.

Facciamo variare x^{-1} su ϱ_2 (di Φ_{-1}): la conica di Koenigs varia mantenendosi tangente alla posizione precedente e osculatrice alla Q in punti della curva ϱ_2 passante per x^1 (giacente tutta su Q). Poichè la conica di Koenigs relativa a x^{-1} sta su Q, vi stanno anche tutte le posizioni successive, quindi pure la curva ϱ_2 per x^{-1}.

Ora facciamo variare la curva ϱ_2 e consideriamone h posizioni infinitamente vicine. Queste h curve ϱ_2 appartengono ad una stessa quadrica, se una ne esiste passante per $h+2$ S_{h-1} osculatori a λ_1 in M e in punti infinitamente vicini e per due S_{h-1} osculatori a γ_2 in N e in punto infinitamente vicino. Poniamo di aver dimostrato l'esistenza di una tal quadrica Q: gli S_{h-1}, in cui si trovano le curve ϱ_1 di Φ_{-1}, incontrano almeno in h punti (infin. vicini, sulle h curve ϱ_2) la Q. Ma due di essi sono contenuti, per costruzione, sulla quadrica Q, quindi vi appartengono tutti. Q contiene dunque tutti gli S_{h-1} osculatori a γ_2; scambiando Φ_{-1} con Φ_1, si vede che Q contiene anche tutti gli S_{h-1} osculatori a γ_1 (poichè ne contiene già $h+2$).

Rimane da vedere se esista una quadrica soddisfacente alle condizioni imposte. Perchè un S_{h-1} appartenga ad una quadrica di $S_n = S_{2h}$, occorre che vi appartengano $\frac{h(h+1)}{2}$ suoi punti; poichè due S_{h-1} osculatori successivi si tagliano in un S_{h-2} che pure deve appartenere alla quadrica, si hanno, per questo, $\frac{h(h-1)}{2}$ condizioni; quindi, ad esprimere che lo S_{h-1} appartiene alla quadrica, occorrono più soltanto h condizioni. Sicchè gli $h+2$ S_{h-1} osculatori successivi a γ_1 impongono $\frac{h(h-1)}{2} + h(h+2)$ condizioni. Analogamente i due S_{h-1} osculatori a γ_2 impongono $\frac{h(h-1)}{2} + 2h$ condizioni. In totale si hanno

$$h(h-1) + h(h+4) = h(2h+3) = \frac{n(n+3)}{2}$$

condizioni, cioè appunto tante quante bastano per individuare una quadrica in S_n (1). Raccogliendo, abbiamo:

le curve γ_1, γ_2, *insieme con le loro sviluppabili fino a quelle costituite dagli* S_{h-1} *osculatori, stanno sopra una stessa quadrica* Q; c. v. d.

Siccome non ci sono altre condizioni da sfruttare, si è certi che, scegliendo in questo modo γ_1 e γ_2, si ha, come luogo dei punti d'incontro degli S_h osculatori, una superficie Φ ad invarianti uguali, la cui successione di Laplace si chiude dalle due parti. Infatti il piano tangente in un punto x taglia la quadrica Q in una conica che per costruzione riesce osculatrice in x^1 ad una curva ϱ_1, e in x^{-1} ad una curva ϱ_2; quindi deve coincidere con la conica di Koenigs, e perciò l'equazione ha invarianti uguali.

8. Per tradurre analiticamente il resultato, facciamo ancora qualche osservazione relativamente alle curve γ_1, γ_2: quel che si dice per una, vale anche per l'altra. Poichè gli S_{h-1} osculatori alla γ_1 sono contenuti in Q, gli S_{n-1} osculatori a γ_1 nei suoi punti sono gli iperpiani ivi tangenti a Q. Infatti, lo S_h osculatore in un punto è polare dello S_{h-1} osculatore, e così di seguito (si noti che anche questo fatto è essenzialmente legato alla parità dello spazio, chè in uno spazio dispari non sarebbe possibile costruire curve come quelle qui richieste). Rappresentiamo ancora γ_1 con la (2): dev'essere anzitutto $n = 2h$. Inoltre, se vogliamo ottenere enti reali, l'equazione della quadrica Q riferita ad un $(n+1)$-edro autopolare può scriversi:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_h^2 - x_{h+1}^2 - x_{h+2}^2 - \cdots - x_{2h+1}^2 = 0.$$

(1) Il fatto che questa quadrica contiene S_{h-1} osculatori a curve (γ_1 e γ_2) è possibile solo perchè l'ambiente ha dimensione pari. Vedi per es. Bertini: *Geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907), cap. 6, n. 18.

È poi notissimo, nella teoria delle equazioni (2), che il passaggio da essa all'aggiunta equivale a sostituire alla curva (che ne è il modello proiettivo) i suoi S_{n-1} osculatori, o, se si vuole, il luogo dei poli di questi S_{n-1} rispetto a Q: ma, nel nostro caso, questo luogo coincide con la curva primitiva; dunque le equazioni (2) e (3) debbono essere d'ordine dispari e autoaggiunte.

Una superficie dello stesso tipo si ottiene partendo dalle curve γ_1, γ_2, considerando i loro $S_{h+\beta}$ osculatori, gli $S_{2\beta}$ d'intersezione di due di essi appartenenti a curve diverse, e infine tagliando con un $S_{2h-2\beta}$ la configurazione ottenuta.

Possiamo quindi concludere col teorema di Darboux [1]:

Si ottengono tutte le equazioni a invarianti uguali che s'integrano col metodo di Laplace, prendendo, nelle espressioni (4), $h = k$, *e come funzioni* x, y *soluzioni particolari di due equazioni d'ordine dispari autoaggiunte; queste soluzioni debbono inoltre esser tali da soddisfare, insieme con tutte le loro derivate fino a quelle d'ordine* $h - 1$, *ad una stessa relazione quadratica.*

Meccanica. — *Sistemi astatici equivalenti a due forze astatiche irriducibili.* Nota II di Matteo Bottasso, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Altre proprietà del complesso degli assi centrali.

8. Il teorema precedente permette già di raffigurarci molto chiaramente il complesso degli assi centrali del sistema dato; esso può però completarsi considerando gli assi centrali passanti per un punto improprio, o per un punto del piano mediano.

Come nel caso generale, si riconosce facilmente (*Astat.*, n. 54 e n. 75) che:

Gli assi centrali paralleli ad un vettore unitario $\mathbf{u}$, *fissato ad arbitrio, formano un cilindro circolare retto, il cui asse passa per il punto centrale ed il cui raggio è* $(\mathrm{mod}\,\sigma\mathbf{u})/f$, *cioè* [*per la* (7)] $p\mathbf{u} \times \mathbf{i}_1$. *Tale raggio è nullo quando* $\mathbf{u}$ *è normale alla retta centrale, ed è massimo quando* $\mathbf{u}$ *è parallelo a questa retta. La sezione del cilindro indicato, di raggio non nullo, col piano mediano, è l'ellisse (bitangente al circolo focale) luogo delle traccie di tutti gli assi centrali che s'appoggiano alla retta* Gu.

[1] Darboux, loc. cit., vol. II, ch. VII, n. 388.

Basta infatti osservare che tenendo fissa la direzione dell'asse centrale r, cioè il vettore $\mathbf{j}_3$ in (10), e cambiando, in questa, $\mathbf{j}_1$ in un altro qualsiasi vettore unitario $\mathbf{j}_1'$ (normale a $\mathbf{j}_3$), è sempre $G - p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 \cdot \mathbf{j}_1'$ il piede della perpendicolare all'asse centrale condotta da G, e quindi è $\pm p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3$ la distanza del punto centrale G da detto asse. c. d. d.

9. Se è d la distanza d'un punto Q del piano mediano, non esterno al circolo focale, dal punto centrale, s'avrà, come nella (15), $Q = G + p\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_2$ quando si abbia

$$p\mathbf{j}_2 = \pm \sqrt{p^2 - d^2}\, \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \wedge (Q - G),$$

come risulta subito moltiplicando vettorialmente per $\mathbf{i}_1$, ed osservando che il quadrato del secondo membro è p^2. Gli assi centrali (paralleli a $\mathbf{j}_3$) corrispondenti a tale vettore $\mathbf{j}_2$ sono normali a questo vettore, e quindi s'appoggiano alla retta per G parallela al vettore $d^2\mathbf{i}_1 \pm \sqrt{p^2 - d^2}\, \mathbf{i}_1 \wedge (Q - G)$, il che, dopo quanto si è visto nei numeri precedenti, permette di concludere il teorema:

Il cono degli assi centrali, con vertice in un punto del piano mediano non esterno al circolo focale, si spezza in due piani passanti per il punto centrale, simmetrici rispetto al piano mediano, e tali che il seno del loro semidiedro è uguale al rapporto della distanza, del punto considerato dal punto centrale, al raggio del circolo focale.

Per un punto del piano mediano, fuori del circolo focale, non vi sono altri assi centrali (reali) oltre alla congiungente del punto stesso col punto centrale.

Il teorema di Minding
per i sistemi riduttibili astaticamente a due forze

10. Dal teorema precedente risulta, in particolare, che *gli assi centrali passanti per un punto del circolo focale formano un unico fascio (doppio), il cui piano è perpendicolare al piano mediano, cioè passa per la retta centrale.*

Inversamente, si ha che:

Gli assi centrali, appartenenti ad un piano passante per la retta centrale, formano due fasci di rette i cui centri sono i punti d'incontro del piano dato con il circolo focale. Ognuno degli assi indicati è il sostegno d'una forza che può sostituire (staticamente), in una configurazione conveniente, tutte le forze del sistema dato.

Infatti, siano: $\mathbf{i}_2$ un vettore unitario perpendicolare alla retta centrale, cioè ad $\mathbf{i}_1$, e parallelo al piano considerato, ed $\mathbf{u}$ un vettore unitario qualsiasi dello stesso piano. Le rette dei due fasci indicati si ottengono allora dal bipunto $(G \pm p\mathbf{i}_2)\mathbf{u}$ facendo variare il vettore $\mathbf{u}$; e poichè la distanza di $(G \pm p\mathbf{i}_1)\mathbf{u}$, dal punto centrale G, è $\pm p\mathbf{u} \times \mathbf{i}_1$ (che è precisamente, per

il n. 8, la distanza da G dei due assi centrali paralleli ad $\mathbf{u}$, e situat nel piano $G\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$), così tutte le rette indicate appartengono al complesso degli assi centrali. Ad una qualsiasi di queste rette g corrisponde almeno una configurazione del dato sistema, nella quale g è rappresentato dal bipunto r (10). In tale configurazione il vettore $\mathbf{j}_3$ è parallelo al piano considerato $G\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$; e poichè $G = p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 \,.\, \mathbf{j}_1$ è il piede della perpendicolare condotta per il punto centrale G alla retta g, escludendo il caso (già considerato nel n. 5) di $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 = 0$, si ha che il vettore $\mathbf{j}_1$ è anch'esso parallelo al piano $G\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$: perciò $\mathbf{j}_2$ è normale a questo piano, e la condizione (11) è verificata. c. d. d.

11. A complemento del teorema precedente (e di quanto s'è visto nel n. 5), si ha la proposizione seguente, che sostituisce, nel caso in esame, il teorema di Minding:

Quando un sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$ *è astaticamente riducibile a due sole forze, la congruenza luogo delle rette, ciascuna delle quali è il sostegno d'una forza* (*di vettore* $\mathbf{f}$) *che può sostituire staticamente il sistema di forze, in una conveniente configurazione, è formata da tutte* (*e sole*) *le rette che incontrano la retta centrale ed il circolo focale del sistema dato.*

Infatti, quando $ss = 0$, cioè è verificata la (11), la forma s (9) (che è allora un bipunto) rappresenta tutte le rette della congruenza indicata; e si vede immediatamente che tutte queste rette incontrano la retta centrale $G\mathbf{i}_1$, poichè si ha identicamente $G\mathbf{i}_1 \, s = 0$.

Inoltre la (15) mostra che, quando $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 \neq 0$, ed è verificata la (11), il vettore $\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_2$ ha modulo unitario; ed il punto $G + p\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_2$ d'incontro di r (od s) col piano mediano $G\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ risulta, così, sempre sul circolo focale. Quando è $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 = 0$, già sappiamo (n. 5) che le rette considerate, normali alla retta centrale, appartengono al piano mediano.

Inversamente, per i nn. 5 e 10, tutte le rette che si appoggiano alla retta centrale ed al circolo focale appartengono alla congruenza indicata; ed il teorema è, così, completamente dimostrato.

Quadriche omofocali.

12. Se π è una forma di 3ª specie che individua un piano [1], del quale A è un punto ed $\mathbf{u}$ è un vettore unitario ad esso normale, il *momento astatico del sistema rispetto al piano*, cioè il vettore $\Sigma_i \dfrac{3\, P_i \pi}{\operatorname{mod} \pi} \mathbf{f}_i$ (somma dei vettori delle forze per le rispettive distanze, con un segno, dei punti d'applicazione dal piano), risulta eguale (*Astat.*, n. 96) a $\sigma_A \mathbf{u}$.

[1] C. Burali-Forti, *Corso di geometria analitico-proiettiva*, Torino, G. B. Petrini, 1912, pag. 163, n. 196 *c*.

Se allora si considerano tutti i piani rispetto ai quali il modulo del momento del sistema ha un dato valore positivo m , essi inviluppano una quadrica d'equazione (*Astat.*, n. 99):

$$(16) \qquad f^2(M-G)\times(m^2-\mathrm{K}\sigma\,.\,\sigma)^{-1}(M-G)=1\,,$$

la quale è di rivoluzione intorno alla retta centrale, perchè dalle (8) segue (*A. V.*, pag. 166):

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{c} (m^2-\mathrm{K}\sigma\,.\,\sigma)^{-1}= \\ =f^2\left[\frac{1}{m^2-p^2f^2}\,\mathrm{H}(\mathbf{i}_1\,.\,\mathbf{i}_1)+\frac{1}{m^2}\,\mathrm{H}(\mathbf{i}_2\,,\,\mathbf{i}_2)+\frac{1}{m^2}\,\mathrm{H}(\mathbf{i}_3\,,\,\mathbf{i}_3)\right]; \end{array} \right.$$

da quest'equazione si trae, inoltre, che il quadrato del semiasse di rotazione della quadrica è $\frac{m^2}{f^2}-p^2$, ed $\frac{m^2}{f^2}$ è il quadrato del parallelo principale. Da tali espressioni risulta, ancora, che le quadriche (16), al variare di m, formano un sistema di quadriche omofocali, le cui linee focali si ottengono ponendo successivamente p^2f^2, e 0 al posto di m^2; esse sono il circolo focale e la retta centrale. I fuochi principali [1] su questa sono i punti doppî dell'involuzione (di Minchin) del n. 2; e non sono, quindi, reali.

13. Un asse centrale arbitrario r (10) è parallelo al vettore $\mathbf{j}_3$ (od $\mathbf{f}$), e passa per il punto $A=G-p\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_3\,.\,\mathbf{j}_1$. la cui omografia, per le (4) e (7), è:

$$\sigma_A=pf\,[\mathrm{H}(\mathbf{i}_1\,,\,\mathbf{j}_1)+\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_3\,.\,\mathrm{H}(\mathbf{j}_1\,,\,\mathbf{j}_3)]\,.$$

D'altra parte, i piani passanti per l'asse centrale r, ossia per $A\mathbf{j}_3$, si ottengono facendo variare φ nell'espressione $A|\mathbf{u}=A|(\cos\varphi\mathbf{j}_1+\operatorname{sen}\varphi\mathbf{j}_2)$. Perciò, fra i piani uscenti da tale retta, quelli il cui quadrato del momento ha un valore dato m^2, corrispondono agli angoli φ soddisfacenti alla relazione $[\sigma_A(\cos\varphi\mathbf{j}_1+\operatorname{sen}\varphi\mathbf{j}_2)]^2=m^2\,[(\cos\varphi)^2+(\operatorname{sen}\varphi)^2]$, cioè all'equazione di secondo grado in tang φ:

$$(17)\quad \begin{array}{c} [p^2f^2(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_2)^2-m^2](\operatorname{tang}\varphi)^2+2p^2f^2\,\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1\,.\,\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_2\operatorname{tang}\varphi+ \\ +p^2f^2\,[(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1)^2+(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_3)^2]-m^2=0\,, \end{array}$$

alle cui radici corrispondono i piani $A|\mathbf{u}$, per la retta r, tangenti alla quadrica (16).

[1] Ved., per es., L. Bianchi, *Lezioni di geometria analitica*, Pisa, Spoerri, 1915, § 213, pag. 531.

Ora, osserviamo che:

1°) Il prodotto delle due radici di questa equazione sarà -1 quando (e solo quando) è nulla la somma dei coefficienti estremi, cioè è

$$p^2f^2[(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_2)^2+(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1)^2+(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_3)^2]-2m^2=0:$$

ossia, $2m^2=p^2f^2$.

2°) Le due radici dell'equazione (17), corrispondente ad un valore m_1 di m, saranno uguali alle inverse, cambiate di segno, delle radici della stessa equazione (17) per $m=m_2$, quando (e solo quando) il primo ed il terzo coefficiente di detta equazione, per $m=m_1$, sono rispettivamente opposti al terzo ed al primo coefficiente della medesima equazione per $m=m_2$, cioè quando è

$$p^2f^2(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_2)^2-m_i^2=-p^2f^2[(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1)^2+(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_3)^2]+m_j^2,$$

ove i, j indica una delle due permutazioni degli indici 1 e 2; ossia, quando si ha $m_1^2+m_2^2=p^2f^2$.

Si ha così, analogamente a quanto si dimostra per il caso generale [1], che:

Considerando, nel sistema di quadriche omofocali (16), *due iperboloidi* (*che diremo associati*) *ad una falda, i cui raggi dei circoli di gola siano eguali ai cateti d'un qualsiasi triangolo rettangolo avente per ipotenusa il raggio del circolo focale* (*e quindi tali che il quadrato del semi-asse, non trasverso, di uno, sia eguale al quadrato del raggio del circolo di gola dell'altro*), *il complesso degli assi centrali del sistema dato può riguardarsi come il luogo delle rette d'intersezione di due piani ortogonali, uno tangente all'uno, e l'altro tangente all'altro dei due iperboloidi associati.*

In particolare, per $m_1^2=m_2^2=\frac{1}{2}p^2f^2$, o per l'osservazione 1ª), si ha:

Il complesso degli assi centrali è il luogo delle rette d'intersezione delle coppie di piani ortogonali tangenti all'iperboloide, ad una falda, di rotazione intorno alla retta centrale, il cui circolo di gola è concentrico al circolo focale; ed il suo raggio è eguale a quello del circolo focale moltiplicato per $1/\sqrt{2}$, *e la cui sezione meridiana è un'iperbole equilatera.*

14. La nostra deduzione permette ancora di riconoscere senza difficoltà (come nel caso generale: cfr. *Astat.*, n. 106) se una qualsiasi delle coppie di piani ortogonali, indicate nei teoremi precedenti, è *formata da piani reali*, poichè basta esaminare il discriminante dell'equazione (17).

È chiaro intanto, per la (15), — contrariamente al caso generale — che per un asse centrale, non appartenente alla congruenza di Minding,

[1] Ved., per es., E. J. Routh, *A treatise on analytical statics*, vol. II, Cambridge, 1892, pag. 199; oppure *Astat.*, n. 106.

non passa alcun piano reale tangente al circolo focale, come non passa alcun piano reale tangente agli iperboloidi associati con un loro asse sufficientemente piccolo. Si può invece riconoscere che:

I due piani ortogonali tangenti all'iperboloide ad una falda dianzi indicato [*corrispondente ad* $m^2 = \frac{1}{2} p^2 f^2$ *nella* (17)], *ed uscenti da un qualsiasi asse centrale, sono sempre reali.*

Con ciò si ha una effettiva *costruzione geometrica reale* di tutti gli assi centrali del nostro sistema.

Infatti, il discriminante dell'equazione (17), per $m^2 = \frac{1}{2} p^2 f^2$, è

$$p^4 f^4 [(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1)^2 + (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2 - \tfrac{1}{2}][(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 - \tfrac{1}{2}] - p^4 f^4 (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1)^2 (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 =$$
$$= p^4 f^4 [(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2 - \tfrac{1}{4}];$$

e siccome il massimo valore che può assumere il prodotto $(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2$, per un valore assegnato di $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1$, è $\frac{1}{4}[1 - (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1)^2]$, tale discriminante è nullo solo quando $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1 = 0$, ed $(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 = (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2 = \frac{1}{2}$, ed è negativo in ogni altra ipotesi. Nel caso ora indicato, è facile di riconoscere che l'equazione considerata è identicamente soddisfatta, e corrisponde ad assi centrali che incontrano il piano mediano nel circolo di gola dell'iperboloide sopra considerato

Dunque, le radici dell'equazione (17), per $m^2 = \frac{1}{2} p^2 f^2$ sono sempre reali; esse sono inoltre distinte e determinate finchè l'asse centrale considerato, Aj_3, non è una generatrice dell'iperboloide indicato nell'enunciato ultimo del n. 13, chè allora sono (com'è ovvio) indeterminate.

15. Il complesso degli assi centrali rientra così, per l'ultimo teorema del n. 13, nel complesso (caso particolare del complesso di Battaglini) che i francesi (1) chiamano senz'altro « di Painvin », il quale (2) ha studiato più specialmente il luogo delle rette, per ciascuna delle quali si possono condurre due piani ortogonali tangenti ad un dato *ellissoide*; ed è a tale studio che si riferisce il Darboux (loc. cit., pag. 40). Peraltro, non tutte le proprietà dedotte dal Painvin si possono riportare al complesso degli assi centrali di un sistema astatico in cui, come nel caso qui studiato, comparisce sempre un *iperboloide ad una falda* (*Astat.*, n. 106); tanto più avendo sopratutto riguardo, come fa il Painvin (loc. cit., pag. 97), agli elementi reali. Così non si potrebbe rintracciare nel Painvin una costruzione del complesso che corrisponda a quella da noi esposta.

(1) Ved., per es., A Demoulin, *Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires*, Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XX, 1892, pp. 122-132.

(2) Painvin, *Étude d'un complexe du second ordre*, Nouv. Ann. de Mathém. (2), 11, 1872, pp. 49-60, 106-107, 202-210, 289-297, 481-500, 529-539.

Passiamo ancora osservare che dal n. 9 risulta che: *il piano mediano è il luogo dei punti il cui cono delle rette del nostro complesso si spezza in una coppia di piani*; mentre, nel complesso studiato dal Painvin, tale luogo è *una superficie d'onda* (del 4° ordine), i cui punti reali sono tutti al finito.

Direzioni principali.

16. Nel caso che si considera, si possono trovare facilmente le direzioni principali (*A. V.*, I, pag. 35) dell'omografia σ_A del sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$, relativa ad un punto qualsiasi A.

Infatti, dalle (14) e (17) segue, anzitutto, che σ_A trasforma in un vettore nullo ogni vettore normale al piano $AG\mathbf{i}_1$, od alla retta centrale, secondo che A è fuori o sopra questa retta.

Se A è fuori della retta $G\mathbf{i}_1$, e s'indicano con $\mathbf{i}'.\mathbf{j}'$ due vettori unitarî-ortogonali paralleli alle direzioni principali non nulle di σ_A; con $\mathbf{i}.\mathbf{j}$ i corrispondenti vettori unitarî-ortogonali paralleli alle direzioni principali di $K\sigma_A$; e con $a.b$ i relativi parametri principali (*A. V.*, I, pag. 166), è

$$\sigma_A = a\,H(\mathbf{i}', \mathbf{i}) + b\,H(\mathbf{j}', \mathbf{j}).$$

Poichè allora (*A. V.*, I, pag. 166) $R\sigma_A = ab\,H(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, il vettore $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$ è parallelo al vettore $\mathbf{j}_2$ del n. 2; quindi $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, normali a $\mathbf{j}_2$, sono paralleli ad una delle coppie di vettori $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ (6), per un determinato valore di θ: e perciò, in virtù delle (3), i vettori $K\sigma_A\mathbf{i} = a\mathbf{i}'$, $K\sigma_A\mathbf{j} = b\mathbf{j}'$ sono paralleli alle rette ortogonali AP, AQ, che vanno a due punti coniugati nell'involuzione della retta centrale, oltrechè alle direzioni principali, non nulle, di σ_A.

Inversamente, se le due rette AP, AQ, passanti per due punti coniugati (3) dell'involuzione della retta centrale, sono ortogonali, segue subito che, per l'omografia $\sigma_A = H(P - A, \mathbf{h}_1) + H(Q - A, \mathbf{h}_2)$, le direzioni di tali rette sono principali. Così, anche per il n. 7, si ha:

Ogni punto A della retta centrale ha ∞^1 terne principali, ciascuna formata delle direzioni della retta centrale e da due direzioni (nulle per σ_A) ortogonali e normali a tale retta.

Un punto qualunque A, fuori della retta centrale, ha come direzione principale (nulla per σ_A) quella della normale al piano del punto e della retta centrale, insieme con le direzioni della coppia (unica, per A fuori del circolo focale, o fra le ∞^1 coppie siffatte, se A è su tale circolo) di rette ortogonali, che vanno a due punti coniugati nell'involuzione (ellittica, di Minchin) della retta centrale.

17. Le direzioni indicate (doppie per la dilatazione $K\sigma_A.\sigma_A$) sono degli elementi astatici del sistema $(P_i.\mathbf{f}_i)$ rispetto al corpo (*Astat.*, pag. 12), ed hanno perciò una importanza fondamentale nelle ricerche di astatica. Esse

sono parallele sia agli assi dell'*ellissoide centrale* di Darboux, sia a quelli dell'*ellissoide di riduzione* di Da Silva (che sono due quadriche indicatrici, con centro in A, rispettivamente delle dilatazioni $K\sigma_A . \sigma_A$ e $\sigma_A^{-1} . K\sigma_A^{-1}$: cfr. *Astat.*, Appendice), sia agli *assi di squilibrio* di Siacci [1]; e permettono di determinare facilmente, per es., gli assi principali di rotazione di Möbius ed ogni altro elemento invariabilmente legato al corpo.

L'omografia σ_A da noi considerata è definita, oltrechè da tali direzioni principali, dalle direzioni doppie della dilatazione $\sigma_A . K\sigma_A$, astatiche rispetto al sistema di forze, e dai parametri principali (*Astat.*, cap. I, § 10) che sono astatici rispetto al corpo ed alle forze; donde la ragione che con essa si possono facilmente ritrovare le proprietà ottenute sulla astatica con procedimenti assai diversi e spesso complicati. Di più essa permette di completare, e vedere sotto nuova luce, molti risultati noti, poichè presenta il vantaggio di riunire tutti gli elementi che si trovano sempre considerati separatamente dai varî autori, a seconda dei loro punti di vista speciali.

Matematica. — *Formole di derivazione funzionale.* Nota di E. Daniele, presentata dal Socio V. Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla derivazione per serie.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Corrisp. O. Tedone.

Il seguente teorema mi sembra notevole, perchè semplice ed abbastanza generale.

Se $u(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$ *è una serie convergente di funzioni monotòne, per es. non decrescenti, definite in un intervallo* $a \leq x \leq b$, *ivi è quasi dappertutto lecita la derivazione per serie; cioè quasi dappertutto vale la* $u'(x) = \sum_1^\infty u_n'(x)$.

In altre parole:

1°) il gruppo G dei punti, ove non esiste oppure non è finita anche una sola delle $u'(x)$, $u_n'(x)$;

2°) il gruppo dei punti ove $\Sigma u_n'(x)$ non converge;

3°) il gruppo dei punti ove non è $u'(x) = \Sigma u_n'(x)$

sono aggregati di misura nulla.

[1] F. Siacci, *Le quaterne statiche nei sistemi di forma invariabile*, Memorie della Soc. Ital. delle Scienze, detta dei XL, (3°), tom. IV, n. 3, 1882, pag. 7.

Ciò è ben noto (per i teoremi generali del Lebesgue circa le funzioni monotòne) per quanto riguarda il primo gruppo G.

Per un teorema di De la Vallée Poussin (1), è

$$(1)\qquad \begin{cases} u(x) - u(a) = \int_a^x u'(x)\,dx + \mathrm{V}(x) \\ u_n(x) - u_n(a) = \int_a^x u_n'(x)\,dx + \mathrm{V}_n(x)\,, \end{cases}$$

dove le $\mathrm{V}(x)$, $\mathrm{V}_n(x)$ si definiscono nel modo seguente: Costruiamo infiniti sistemi $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(3)}$, ... di intervalli, a due a due senza punti interni comuni, rinchiudenti l'aggregato G. Siano $\delta_1^{(r)}$, $\delta_2^{(r)}$, $\delta_3^{(r)}$, ... gli intervalli di $\Sigma^{(r)}$; la somma delle loro lunghezze *tenda a zero* per $r = \infty$. Siano $v_{nk}^{(r)}$, $v_k^{(r)}$ le variazioni di u_n e di u in uno dei segmentini $\delta_k^{(r)}$, o sua parte, che appartiene all'intervallo (a, x). Poniamo

$$\mathrm{V}^{(r)} = \sum_k v_k^{(r)} \quad , \quad \mathrm{V}_n^{(r)} = \sum_k v_{nk}^{(r)}\,.$$

Il teorema citato dice che:

$$\mathrm{V}(x) = \lim_{r=\infty} \mathrm{V}^{(r)} \quad ; \quad \mathrm{V}_n(x) = \lim_{r=\infty} \mathrm{V}_n^{(r)}\,.$$

Evidentemente

$$v_k^{(r)} = \sum_n v_{nk}^{(r)}\,,$$

donde

$$\mathrm{V}^{(r)} = \sum_k v_k^{(r)} = \sum_k \sum_n v_{nk}^{(r)}\,.$$

Essendo le $v_{nk}^{(r)}$ positive, si possono nel terzo membro invertire i simboli di sommatoria, cosicchè

$$(2)\qquad \mathrm{V}^{(r)} = \sum_n \left[\sum_k v_{nk}^{(r)} \right] = \sum_n \mathrm{V}_n^{(r)}\,.$$

Ora noi possiamo scegliere i $\Sigma^{(r)}$ in guisa che ogni $\Sigma^{(r+1)}$ sia interno a $\Sigma^{(r)}$. Con tale scelta, le $\mathrm{V}^{(r)}$, $\mathrm{V}_n^{(r)}$ decresceranno al crescere della r, pure essendo positive; e perciò è ultimo membro di (1) ha, per $r = \infty$, un limite, che si può calcolare passando al limite termine a termine. Quindi

$$(3)\qquad \mathrm{V}(x) = \lim_{r=\infty} \mathrm{V}^{(r)} = \lim_{r=\infty} \sum_n \mathrm{V}_n^{(r)} = \sum_n \lim_{r=\infty} \mathrm{V}_n^{(r)} = \sum_n \mathrm{V}_n(x)\,.$$

(1) De la Vallée-Poussin, *Cours d'analyse infinitésimale*, vol. I, 2ª edizione, 1909, pag. 269.

Ora, poichè $u(x) = \sum_n u_n(x)$, dalle (1) si trae:

$$\int_a^x u'(x)\,dx + \mathrm{V}(x) = \sum_n \int_a^x u_n'(x)\,dx + \sum_n \mathrm{V}_n(x)\,, \tag{4}$$

la quale, per (3), diventa:

$$\int_a^x u'(x)\,dx = \sum_n \int_a^x u_n'(x)\,dx\,. \tag{5}$$

Essendo le $u_n'(x)$ non negative, e convergendo il secondo membro di (5), si avrà [1]:

$$\sum_n \int_a^x u_n'(x)\,dx = \int_a^x \sum_n u_n'(x)\,dx\,, \tag{6}$$

cosicchè la (5) diventa:

$$\int_a^x u'(x)\,dx = \int_a^x \left[\sum_n u_n'(x)\right] dx\,.$$

Derivando, se ne deduce che, come si doveva dimostrare, è quasi dappertutto

$$u'(x) = \sum_n u_n'(x)\,.$$

Matematica. — *Sopra una equazione integro-differenziale del tipo ellittico.* Nota di Luigi Sinigallia, presentata dal Socio V. Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] B. Levi, *Sopra l'integrazione delle serie*, Rendiconti dell'Istituto lombardo, vol. XXXIX (1906), pp. 775 e segg.

Meccanica. — *Sulle vibrazioni di una corda elastica in un mezzo resistente.* Nota I del dott. Francesco Sbrana, presentata dal Corrispondente O. Tedone.

1. Ci occuperemo, in questa Nota, del problema delle vibrazioni di na corda elastica tesa, attorno alla sua posizione di equilibrio, in un mezzo resistente, supponendo che la resistenza del mezzo si possa rappresentare con un sistema di forze applicate agli elementi della linea, dello stesso ordine di grandezza di questi elementi, e proporzionali alle loro velocità, e che si possa trascurare il peso della corda stessa.

Di questo problema si sanno determinare le soluzioni elementari (1), e da queste, coi noti metodi, si può risalire alla soluzione generale. Il nostro còmpito sarà invece quello di pervenire ad una tale soluzione, servendoci della formula che il metodo delle caratteristiche di Riemann fornisce per l'integrale generale dell'equazione a derivate parziali del problema. Il vantaggio, che fornisce un tal metodo, consiste principalmente nel non richiedere, perchè esso sia applicabile, che le funzioni che compaiono nelle condizioni iniziali siano prima poste sotto forma di espressioni analitiche speciali.

2. Nella posizione di equilibrio la corda sia distesa lungo l'asse x positivo, tra i punti di ascissa $x = 0$, $x = \mathrm{L}$, sicchè sia L la sua lunghezza in questo stato di equilibrio. Cominceremo a contare il tempo dall'istante iniziale del movimento.

Chiamiamo u, v, w le componenti dello spostamento di un punto della corda, a partire dalla posizione di equilibrio, secondo gli assi x, y, z. E notiamo che, dal punto di vista analitico, la determinazione di u, v, w costituisce uno stesso problema: quello cioè di ottenere una funzione φ di x e t, la quale, per $t > 0$ e x compreso tra 0 ed L, sia soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2f \frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tag{1}$$

si riduca a 0 per $x = 0$, $x = \mathrm{L}$ e $t > 0$, e assuma valori assegnati, insieme con $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, per $t = 0$, e x compreso tra 0 ed L. Soltanto le costanti f e a^2 hanno ordinariamente valori diversi, secondochè φ rappresenta lo spostamento

(1) Ved., per es., Routh, *The advanced part of a Treatise on the Dynamics of a system of a rigid bodies*, ediz. 1908, pag. 438; Bouasse, *Mécanique physique*, 2me edit., pag. 572.

longitudinale u o una delle componenti v, w dello spostamento trasversale di un punto della corda.

Per risolvere questo problema, conviene trasformare la (1) nell'altra:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = U \,, \tag{2}$$

ponendo $\varphi = Ue^{-ft}$, e $\xi = \frac{f}{a}x$, $\eta = ft$. Si ponga pure $l = \frac{f}{a}L$. E allora, considerando ξ e η come coordinate ortogonali in un piano, il nostro problema si può porre sotto quest'altra forma:

« determinare una funzione U di ξ e η, la quale, in tutto il campo C del piano $\xi\eta$, limitato dalle rette $\xi = 0$ e $\xi = l$, nel quale $\eta > 0$, sia soluzione della (2), si annulli per $\xi = 0$ e $\xi = l$, e soddisfi inoltre alle condizioni:

$$(U)_{\eta=0} = f(\xi) \quad ; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = F(\xi),$$

essendo f e F funzioni assegnate della ξ, per ξ compreso tra 0 ed l ».

3. Sia ora τ una regione qualunque del piano $\xi\eta$, nella quale U è una soluzione regolare della (2), ed s una linea aperta in questo campo, lungo la quale sono assegnati i valori di U e delle derivate prime, mediante tre funzioni continue, delle quali, naturalmente, due sole saranno indipendenti. Se conduciamo, per un punto $0 \equiv (\xi_0, \eta_0)$ di τ, le due caratteristiche dell'equazione (2)

$$\xi - \eta = \xi_0 - \eta_0 \quad ; \quad \xi + \eta = \xi_0 + \eta_0$$

che diremo del 1° e del 2° sistema rispettivamente, indichiamo con 1 e 2 le loro intersezioni colla linea s, e intendiamo che il senso positivo su essa linea sia quello che va dal punto 1 al punto 2, la formula che dà il calore di U in 0, per mezzo dei valori che la U stessa e le sue derivate prime acquistano su s, tra i punti 1 e 2, ottenuta coll'applicazione del metodo delle caratteristiche di Riemann, si scrive:

$$2U_0 = U_1 + U_2 + \int_1^2 \left\{ \left(I_0 \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial I_0}{\partial \eta} \right) d\xi + \left(I_0 \frac{\partial U}{\partial \xi} - U \frac{\partial I_0}{\partial \xi} \right) d\eta \right\}, \tag{3}$$

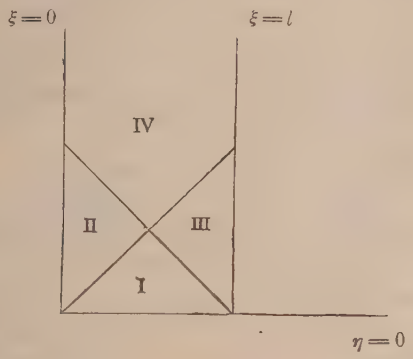
essendo U_0, U_1, U_2 i valori di U nei punti 0, 1, 2, e intendendosi l'integrale esteso alla linea s fra i punnti 1 e 2. Inoltre abbiamo indicato semplicemente con I_0 la funzione

$$I_0(z) = \sum_0^\infty {}_i \frac{z^{2i}}{2^{2i}\, i!\, i!} \qquad z = \sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - (\xi - \xi_0)^2} \ (^1).$$

(1) Ved., per es., Riemann-Weber, *Part. Diff.-gleich. der math. Physik.* 2er Bd., ediz. 1912, pag. 306.

4. Cercheremo di risolvere il nostro problema coll'aiuto della formula (3), assumendo per la linea s, che comparisce nella formula (3), il contorno del campo C.

Dividiamo anzitutto il campo stesso nelle regioni I, II, III, IV, come è indicato dalla figura, mediante la caratteristica del 1° sistema uscente dall'origine delle coordinate, e quella del 2° sistema uscente dal punto di ascissa l dell'asse ξ. Conduciamo quindi per un punto $0 \equiv (\xi_0, \eta_0)$ del



campo C le due caratteristiche uscenti da esso. Intenderemo come punto 1 l'intersezione della caratteristica del 1° sistema coll'asse ξ positivo se 0 è nelle regioni I o III, coll'asse η positivo se 0 è nelle regioni II o IV; e come punto 2 l'intersezione dell'altra caratteristica coll'asse ξ positivo se 0 è nelle regioni I o II, colla parte positiva della retta $\xi = l$ se 0 è nelle regioni III o IV. Quando il punto 0 cade nella regione I, la formula (3) diventa:

$$(4) \qquad 2U_0 = f(\xi_0 - \eta_0) + f(\xi_0 + \eta_0) + \\ + \int_{\xi_0 - \eta_0}^{\xi_0 + \eta_0} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - \xi_0)^2} \right) d\xi ,$$

e determina quindi, senz'altro, il valore di U in questa regione, per mezzo delle funzioni assegnate f ed F. Se 0 cade nella regione II, ponendo $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \varphi(\eta)$, la formula stessa diventa:

$$(5) \qquad 2U_0 = f(\eta_0 + \xi_0) + \\ + \int_0^{\eta_0 + \xi_0} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - \xi_0)^2} \right) d\xi - \\ - \int_0^{\eta_0 - \xi_0} I_0 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - \xi_0^2} \right) \varphi(\eta)\, d\eta ;$$

e se 0 cade nella regione III. ponendo $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=l} = \psi(\eta)$:

$$(6) \qquad 2U_0 = f(\xi_0 - \eta_0) + \int_{\xi_0-\eta_0}^{l} \left[F(\xi) + f(\xi)\frac{\partial}{\partial \eta_0}\right] I_0\left(1\sqrt{\eta_0^2 - (\xi-\xi_0)^2}\right) d\xi + \int_0^{\xi_0+\eta_0-l} I_0\left(1\sqrt{(\eta-\eta_0)^2 - (l-\xi_0)^2}\right) \psi(\eta)\, d\eta .$$

Se infine 0 è nella regione IV, otteniamo, allo stesso modo, la formula:

$$(7) \qquad 2U_0 = -\int_0^{\eta_0-\xi_0} I_0\left(1\sqrt{(\eta-\eta_0)^2 - \xi_0^2}\right) \varphi(\eta)\, d\eta + \int_0^{l} \left[F(\xi) + f(\xi)\frac{\partial}{\partial \eta_0}\right] I_0\left(1\sqrt{\eta_0^2 - (\xi-\xi_0)^2}\right) d\xi + \int_0^{\eta_0+\xi_0-l} I_0\left(1\sqrt{(\eta-\eta_0)^2 - (l-\xi_0)^2}\right) \psi(\eta)\, d\eta ,$$

nella quale è ancora $\varphi(\eta) = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=0}$, $\psi(\eta) = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=l}$.

La funzione U sarà dunque determinata anche nelle regioni II, III, IV, quando si conoscano i valori di $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$. Il nostro problema sarà perciò risoluto se noi riusciremo a determinare queste ultime funzioni.

Le condizioni alle quali le funzioni $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ devono soddisfare, si ottengono imponendo al valore di U determinato, nel campo C, dal sistema delle formule precedenti, che tenda a zero quando si fà tendere il punto 0 ad un punto del contorno del campo C appartenente all'asse η o alla retta $\xi = l$.

Facendo tendere ξ_0 a 0 nella (5), troviamo allora:

$$(8) \qquad 0 = f(\eta_0) + \int_0^{\eta_0} \left[F(\xi) + f(\xi)\frac{\partial}{\partial \eta_0}\right] I_0\left(1\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}\right) d\xi - \int_0^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta ;$$

e facendo tendere ξ_0 ad l nella (6), otteniamo:

$$(9) \qquad 0 = f(l-\eta_0) + \int_{l-\eta_0}^{l} \left[F(\xi) + f(\xi)\frac{\partial}{\partial \eta_0}\right] I_0\left(1\sqrt{\eta_0^2 - (\xi-l)^2}\right) d\xi + \int_0^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, \psi(\eta)\, d\eta .$$

Infine, facendo tendere ξ_0 prima a 0, poi ad l, nella (7), abbiamo le due equazioni:

$$(10)\quad \begin{cases} 0 = \displaystyle\int_0^l \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi + \\ \quad + \displaystyle\int_0^{\eta_0 - l} I_0 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2} \right) \psi(\eta)\, d\eta - \int_0^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta \\ 0 = \displaystyle\int_0^l \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - l)^2} \right) d\xi - \\ \quad - \displaystyle\int_0^{\eta_0 - l} I_0 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2} \right) \varphi(\eta)\, d\eta + \int_0^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, \psi(\eta)\, d\eta . \end{cases}$$

La (8), nella quale è da ritenersi $\eta_0 < l$, è un'equazione integrale, alla quale deve soddisfare $\varphi(\eta)$, per $\eta < l$; analogamente la (9) è un'equazione integrale cui deve soddisfare $\psi(\eta)$, per $\eta < l$. Nelle (10) è invece da ritenersi $\eta_0 > l$. Se si suppone di aver determinato $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ per $\eta < n\,l$, essendo n un intero positivo qualunque, le (10) ci dànno subito due equazioni integrali alle quali devono soddisfare $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ rispettivamente, per η compreso tra $n\,l$ ed $(n+1)\,l$.

5. Le equazioni integrali, delle quali debbono essere soluzioni $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, sono tutte del tipo

$$(11)\qquad \int_c^{x_0} I_0(x_0 - x)\, \varphi(x)\, dx = \Phi(x_0) - \Phi(c) ,$$

dove c è una costante; e si possono quindi risolvere mediante la formula

$$(11')\qquad \varphi(x_0) = \Phi'(x_0) - \int_c^{x_0} [\Phi(x) - \Phi(c)] \frac{I_1(x_0 - x)}{x_0 - x}\, dx ,$$

ottenuta dal prof. Tedone (1). Si ottengono però espressioni più semplici per $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, cercando il limite, per $\xi = 0$ e $\xi = l$, della derivata, rapporto a ξ della funzione U determinata dalle (5), (6), (7). Sarà necessario allora di verificare che i valori di $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, che si ottengono per questa via, soddisfano effettivamente alle equazioni integrali delle quali le funzioni stesse debbono essere soluzioni.

Questo procedimento, del resto, non è che quello stesso col quale il prof. Tedone è riuscito ad ottenere la formula di risoluzione dell'equazione (11).

(1) *Sulla integrazione dell'equazione delle onde smorzate, col metodo delle caratteristiche.* Questi Rendiconti, seduta 31 maggio 1913.

Derivando dunque la (5) rapporto a ξ_0, e facendo quindi tendere ξ_0 a 0 nella formula ottenuta, troviamo subito, quando s'imponga la condizione che $\frac{\partial U_0}{\partial \xi_0}$ tenda a $\varphi(\eta_0)$ per $\xi_0 = 0$,

$$(8') \quad \varphi(\eta_0) = f'(\eta_0) + F(\eta_0) - \frac{\eta_0}{2} f(\eta_0) - \\ - \int_0^{\eta_0} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi = \\ = f'(\eta_0) + \int_0^{\eta_0} \left[F'(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi .$$

Derivando la (6) ancora rapporto a ξ_0, e facendo tendere, nella formula ottenuta, ξ_0 ad l, ricaviamo, quando s'imponga la condizione che $\frac{\partial U_0}{\partial \xi_0}$ tenda a $\psi(\eta_0)$ per $\xi_0 = l$,

$$(9') \quad \psi(\eta_0) = f'(l - \eta_0) - F(l - \eta_0) - \frac{\eta_0}{2} f(l - \eta_0) - \\ - \int_{l-\eta_0}^{l} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - l)^2} \right) d\xi = \\ = f(l - \eta_0) + \int_0^{\eta_0} \left[F'(l - \xi) + f'(l - \xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi .$$

Finalmente, derivando la (7), e facendo quindi tendere ξ_0 prima a 0, poi ad l, otteniamo allo stesso modo:

$$(10') \begin{cases} \varphi(\eta_0) = \psi(\eta_0 - l) - \int_0^{l} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi + \\ \qquad + l \int_0^{\eta_0 - l} \frac{I_1 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2} \right)}{\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}} \psi(\eta)\, d\eta \\ \psi(\eta_0) = \varphi(\eta_0 - l) - \\ \qquad - \int_0^{l} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - l)^2} \right) d\xi + \\ \qquad + l \int_0^{\eta_0 - l} \frac{I_1 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2} \right)}{\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}} \varphi(\eta)\, d\eta . \end{cases}$$

Le formule (8') e (9') dànno i valori $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, per $\eta < l$; e se si suppongono note $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ per $\eta < n\,l$, le (10') determinano esse funzioni per η compreso tra $n\,l$ ed $(n+1)\,l$.

Fisica. — *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Una lamina metallica piana sia sottoposta all'azione di un campo magnetico H, ad essa normale; e si supponga, come nella teoria elettronica della conduzione dei metalli, che la corrente elettrica sia in essi trasportata con meccanismo convettivo dagli ioni positivi e negativi liberamente vaganti in seno al metallo, e dotati delle mobilità che indicheremo rispettivamente con v_1 e v_2. Siano N_1 e N_2 i numeri di ioni positivi e negativi per centimetro cubo; e il valore assoluto della carica elettrica comune per le due specie di ioni; X e Y le componenti della forza elettrica nel senso di due assi x e y, e j_x e j_y le componenti della densità di corrente. Sarà perciò

$$(1) \qquad \begin{cases} j_x = e\left(N_1 \frac{d\xi_1}{dt} - N_2 \frac{d\xi_2}{dt}\right) \\ j_y = e\left(N_1 \frac{d\eta_1}{dt} - N_2 \frac{d\eta_2}{dt}\right), \end{cases}$$

dove $\frac{d\xi_1}{dt}, \frac{d\xi_2}{dt}, \frac{d\eta_1}{dt}, \frac{d\eta_2}{dt}$ rappresentano le componenti della velocità degli ioni secondo gli assi.

La velocità secondo un asse determinerà una forza elettromagnetica ad esso normale, che si aggiungerà alla forza elettrica dipendente dalla distribuzione dei potenziali sulla lamina. Supposto che la lamina sia mantenuta a temperatura costante, non avremo a considerare altre forze motrici dello ione, all'infuori della forza elettrica e di quella elettromagnetica destata dal moto secondo l'asse normale. Se gli assi x e y e il campo H formano un triedro ortogonale destrorso, avremo perciò

$$\frac{d\xi_1}{dt} = ev_1\left(X - H\frac{d\eta_1}{dt}\right) \quad ; \quad \frac{d\eta_1}{dt} = ev_1\left(Y + H\frac{d\xi_1}{dt}\right)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -ev_2\left(X - H\frac{d\eta_2}{dt}\right) \quad ; \quad \frac{d\eta_2}{dt} = -ev_2\left(Y + H\frac{d\xi_2}{dt}\right),$$

da cui si ricava, posto $m_1 = He v_1$, $m_2 = He v_2$,

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{ev_1}{1+m_1^2}(X - m_1 Y) \quad ; \quad \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{ev_1}{1+m_1^2}(Y + m_1 X)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{ev_2}{1+m_2^2}(X - m_2 Y) \quad ; \quad \frac{d\eta_2}{dt} = -\frac{ev_2}{1+m_2^2}(Y + m_2 X).$$

Sostituendo nelle (1), dopo aver posto

$$s_1 = \frac{N_1 e^2 v_1}{1 + m_1^2} \quad ; \quad s_2 = \frac{N_2 e^2 v_2}{1 + m_2^2}$$
$$s = s_1 + s_2 \quad ; \quad \varepsilon = m_1 s_1 - m_2 s_2 ,$$

si ottiene

$$(2) \quad \begin{cases} j_x = sX - \varepsilon Y \\ j_y = \varepsilon X + sY \end{cases} \qquad (3) \quad \begin{cases} X = \dfrac{1}{s^2 + \varepsilon^2}(s j_x + \varepsilon j_y) \\ Y = \dfrac{1}{s^2 + \varepsilon^2}(-\varepsilon j_x + s j_y), \end{cases}$$

le quali permettono di passare dal campo elettrico alla corrente, e viceversa.

2. La corrente elettrica j dovrà ancora soddisfare alla condizione di continuità

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 ,$$

il che porta alla condizione

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 ,$$

cioè, come avviene senza l'azione del campo, il potenziale V obbedirà alla condizione di Kirchoff,

$$\Delta^2 V = 0 ,$$

Inoltre, essendo stati gli elettrodi supposti di resistenza trascurabile e mantenuti ai potenziali costanti V_1 e V_2, il potenziale conserverà questi valori sulle parti della lamina occupate dagli elettrodi stessi.

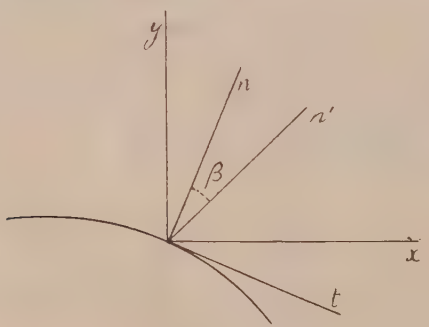


Fig. 1.

Il contorno libero della lamina, se questa è isolata, continuerà ad essere una linea di flusso. Detto perciò α l'angolo che la normale al contorno o a una linea di flusso (fig. 1) fa con l'asse x, sarà, lungo queste linee,

$$j_x \cos\alpha + j_y \operatorname{sen}\alpha = 0 .$$

Tenendo presenti le (2), facilmente si riconosce che questa condizione si traduce nella seguente, dove n e t denotano la normale e la tangente alla linea di flusso:

$$s\frac{\partial V}{\partial n}+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}=0; \tag{4}$$

e perciò, indicando con n' una retta formante nel senso destrorso un angolo β con n, tale che

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{\varepsilon}{s}$$

si avrà

$$\frac{\partial V}{\partial n'}=0$$

Adunque: *mentre senza l'azione del campo, su una qualunque linea di flusso, e perciò sul contorno libero, è nulla la derivata del potenziale secondo la normale, per effetto del campo lungo le stesse linee è nulla la derivata di* V *secondo una direzione che forma con la normale un angolo costante in tutta la lamina.*

Quest'angolo si rovescia simmetricamente rispetto alla normale, qualora si inverta il campo, poichè cambia il segno di ε.

Si può perciò concludere che, mentre, senza l'azione del campo, le linee equipotenziali e quelle di flusso formano un sistema ortogonale, per effetto del campo si deformeranno le une, o le altre, o entrambi i fasci di curve, fino a formare un sistema isoclino in tutta la lamina. La rotazione non è trascurabile, poichè nel bismuto l'angolo β può assumere un valore superiore a 10°.

3. La determinazione del potenziale V lungo la lamina, e perciò la previsione del fenomeno di Hall isotermico in una lamina di qualunque forma, è, così, ricondotta alla risoluzione di un particolare problema di Dirichlet: trovare cioè una funzione che soddisfi, entro la lamina, alla condizione

$$\Delta^2 V=0,$$

che prenda determinati valori V_1 e V_2 sugli elettrodi, e che al contorno libero della lamina verifichi la condizione

$$\frac{\partial V}{\partial n'}=0.$$

Se ci si limita alla ricerca della variazione del potenziale prodotta dal campo, cioè alla determinazione dell'effetto Hall vero e proprio, basterà porre

$$V=V_0+v,$$

dove v è la variazione del potenziale primitivo V_0.

La funzione ignota v continuerà a soddisfare all'equazione

$$\Delta^2 v = 0 ,$$

inoltre essa sarà nulla sugli elettrodi, tenuti a potenziale costante; e infine sul contorno libero si avrà, per la (4) (essendo $\frac{\partial V_0}{\partial n} = 0$),

$$s \frac{\partial v}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial V_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = 0 .$$

Ma

$$s \frac{\partial v}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = \sqrt{s^2 + \varepsilon^2} \frac{\partial v}{\partial n'} ;$$

perciò

$$\frac{\partial v}{\partial n'} = - \frac{\varepsilon}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2}} \frac{\partial V_0}{\partial t} .$$

Indicando con I_0 la corrente senza l'azione del campo, e con c la conducibilità della lamina, si avrà, d'altra parte,

$$I_0 = - c \frac{\partial V_0}{\partial t}$$

e, perciò,

$$\frac{\partial v}{\partial n'} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{I_0}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2}} .$$

L'ultima relazione ha un significato fisico evidente: la funzione v è identica alla distribuzione dei potenziali che si determinerebbe nella lamina senza campo, qualora, mantenendo gli antichi elettrodi a potenziale zero, si facesse penetrare per il contorno libero un flusso di correnti il cui valore nel senso n' fosse punto per punto proporzionale alla corrente I_0 che si aveva senza campo.

La (4) dà anche

$$s \frac{\partial v}{\partial n} = - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} .$$

Ma dalle equazioni (2) si deduce facilmente che la corrente j_t nel senso della tangente alla linea di flusso o al contorno è data, mentre agisce il campo, da

$$j_t = - \frac{s^2 + \varepsilon^2}{s} \frac{\partial V}{\partial t} ,$$

e perciò

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\varepsilon}{s^2 + \varepsilon^2} j_t , \tag{5}$$

la quale ci dice che la funzione v è identica col potenziale che si determinerebbe nella lamina, qualora, per mezzo di nuovi elettrodi applicati a tutto il contorno libero, mentre gli antichi son tenuti al potenziale comune zero, si invii nella lamina un flusso di correnti normale al contorno, e proporzionale punto per punto alla corrente locale che si aveva sotto l'azione del campo.

4. Come si è detto, l'effetto del campo si riduce a una rotazione *mutua* di un angolo β delle linee di corrente rispetto a quelle equipotenziali, con la condizione che il contorno sia, come prima, in parte linea di flusso (dove esso è libero) e in parte linea equipotenziale (dove sono gli elettrodi). Ma se la lamina fosse poggiata su elettrodi molto estesi e di elevatissima resistenza specifica, allora il sistema delle linee di corrente resterebbe quello

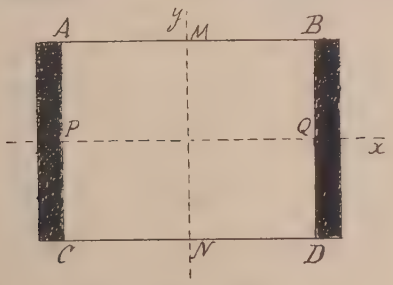


Fig. 2.

di prima, e ruoterebbero solo le linee equipotenziali: il che più non sarebbe impedito dai nuovi elettrodi, i quali consentono che, lungo il contorno della lamina con cui stanno in contatto, il potenziale assuma valori diversi.

Si può anche dire che quando gli elettrodi sono di resistenza nulla, e obbligano parte del contorno a conservare il primitivo potenziale, essi dànno origine a correnti locali con la lamina, cosicchè le linee di corrente totale non son più le primitive. Questo si verificherà anche nel caso semplice di un rettangolo, per esempio di bismuto, provvisto di elettrodi AC BD di rame (fig. 2). Le linee di corrente sotto l'azione del campo non saranno più, come suppone il Drude, parallele all'asse x, cioè quelle esistenti senza campo, poichè le cariche di Hall che si liberano agli orli AB e CD si combineranno in parte attraverso agli elettrodi che mettono gli orli in corto circuito. E perciò la corrente resterà diretta lungo l'asse x solo nell'orlo libero; mentre nell'interno della lamina le linee di corrente saranno deformate. Ciò non avverrebbe se il rettangolo ABCD fosse deposto su elettrodi molto estesi e di altissima resistenza: nel qual caso lungo AC e BD potrebbe crearsi e mantenersi la nuova distribuzione dei potenziali di Hall. Solo allora le linee di corrente resterebbero in tutta la lamina dirette secondo l'asse x,

mentre le linee equipotenziali ruoterebbero di un angolo β rispetto alle antiche.

Tornando al caso di una lamina qualunque, nelle circostanze ora indicate che consentono alle linee di corrente di conservare l'assetto primitivo, sia n una linea equipotenziale a campo zero. La (5), integrata fra gli estremi A a B di una di queste, ci dà

$$v_B - v_A = \frac{\varepsilon}{s^2 + \varepsilon^2} \int_A^B j_t \, dn = \frac{\varepsilon}{s^2 + \varepsilon^2} J ,$$

dove J è la corrente totale che traversa la lamina. E perciò fra due punti del contorno o di due linee di flusso qualunque, se essi sono inizialmente allo stesso potenziale, si manifesterà un effetto Hall costante, proporzionale alla corrente totale che fluisce tra le due linee considerate. In questo caso, perciò, il problema che discutiamo sarà completamente risoluto.

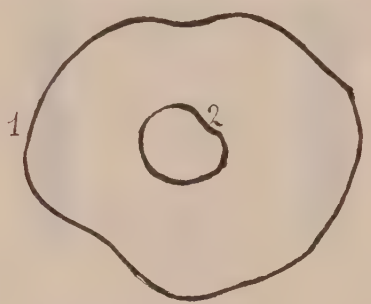


Fig. 3.

4. Possiamo invece considerare un altro caso estremo, facilmente realizzabile: quello di una lamina a connessioni multiple, che abbia sui contorni distinti 1 e 2 due elettrodi a potenziali costanti (fig. 3). Sotto l'azione del campo l'intero contorno conserverà i valori primitivi del potenziale, mentre le linee di corrente potranno deformarsi liberamente, poichè non c'è più una parte del contorno che debba essere, prima e dopo, linea di flusso. Le linee di flusso e quelle di livello faranno, per virtù del campo, un angolo $\frac{\pi}{2} - \beta$; ma, mentre si deformeranno le linee di flusso, resteranno inalterate le equipotenziali, e perciò il potenziale conserverà in tutti i punti il valore di prima. *Mancherà in tale caso l'effetto Hall*; ma la deviazione delle linee di corrente potrà far nascere altri effetti rivelatori dell'azione del campo. Io ho già avuto agio di illustrarne alcuni [1] nel caso di un disco di bismuto che abbia un elettrodo circolare al centro e uno concentrico alla periferia. Le correnti, che sono radiali senza il campo, diventano, per virtù

[1] Corbino, N. Cimento, serie VI, tom. 1, giugno 1911.

di questo, delle spirali logaritmiche, cosicchè il disco si comporta come una lamina magnetica dando origine a quelle singolari azioni elettromagnetiche e meccaniche che potei mettere in evidenza nel lavoro citato.

5. Tolti questi casi estremi, la presenza degli elettrodi arrecherà, nei casi ordinariamente considerati, perturbazioni molto gravi. Così, nel rettangolo della fig. 2 l'esperienza mi ha dimostrato che l'effetto Hall, massimo al centro fra M ed N, declina rapidamente fino a zero, con legge parabolica, avvicinandosi ad AC o a BD. Le correnti che si sovrappongono alla corrente normale hanno un centro di simmetria nel centro O del rettangolo: ma non sono simmetriche rispetto a MN; ne risulta che, lungo MN, esisterà una corrente j_y variabile da punto a punto e perciò la differenza di potenziale tra M ed N verrà diminuita di una quantità proporzionale a $\int_M^N j_y\,dy$ che sarà diversa da zero poichè j_y conserva un segno costante lungo MN e in tutta la lamina; anche fra M ed N avverrà perciò una depressione dell'effetto Hall normale.

Questa causa perturbatrice deve aver necessariamente influito nelle misure finora eseguite del effetto Hall. Essa inoltre giustifica il risultato di un'esperienza da me istituita con una lamina rettangolare di bismuto, molto lunga nel senso y e corta nel senso x, che avrebbe dovuto dare, senza l'azione degli elettrodi AC BD, un effetto Hall fra M ed N superiore alla differenza di potenziale ohmica esistente tra P e Q, costituendo così un trasformatore elevatore *statico* di tensioni per correnti continue.

L'esperienza diede invece per risultato una differenza di potenziale fra M ed N sempre minore di quella longitudinale fra P o Q; l'insuccesso va attribuito appunto all'azione degli elettrodi.

Infine le correnti create dalla presenza degli elettrodi, le quali si sovrappongono alla corrente principale determinando la deformazione delle linee di flusso, daranno luogo ad un consumo supplementare di energia per effetto Joule, che si aggiunge al consumo dovuto alla corrente normale. E perciò la resistenza apparente della lamina deve essere aumentata in misura sensibile, sotto l'azione del campo, per la presenza degli elettrodi.

Sono in corso esperienze per constatare l'effetto previsto.

Fisica matematica. — *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota I del Socio Vito Volterra.

1. Il prof. Corbino ha dimostrato (1) che le leggi della propagazione delle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico dipendono da un potenziale V, il quale è legato alle componenti j_x e j_y della densità della corrente dalle relazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} j_x = -K\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) \\ j_y = -K\left(\dfrac{\partial V}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial V}{\partial x}\right), \end{cases}$$

ove

$$(2)\qquad K = \frac{N_1 e^2 v_1^2}{1 + H^2 e^2 v_1^2} + \frac{N_2 e^2 v_2}{1 + H^2 e^2 v_2^2}$$

$$(3)\qquad \lambda = \operatorname{tg}\beta = \frac{He\left(\dfrac{N_1 v_1^2}{1 + H^2 e^2 v_1^2} - \dfrac{N_2 v_2^2}{1 + H^2 e^2 v_2^2}\right)}{\left(\dfrac{N_1 v_1}{1 + H^2 e^2 v_1^2} + \dfrac{N_2 v_2}{1 + H^2 e^2 v_2^2}\right)},$$

essendo:

H la intensità del campo magnetico normale alla lamina; e il valore assoluto della carica elettrica per gli ioni; v_1 e v_2 le mobilità degli positivi e negativi; N_1 e N_2 il numero degli ioni positivi e negativi per c. c.

Di qui il prof. Corbino deduce che V deve soddisfare alle condizioni seguenti:

1°) in tutta l'area σ occupata dalla lamina,

$$\Delta^2 V = 0;$$

2°) nelle porzioni del contorno libere ed isolate

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 0,$$

(1) Ved. la Nota del prof. Corbino: *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico*, pubblicata in questo stesso fascicolo.

ove l è una direzione che forma, colla normale esterna n, un angolo costante eguale a β;

3°) lungo degli elettrodi di resistenza trascurabile, V è costante.

2. Cominciamo adesso dallo stabilire alcune formule fondamentali che ci serviranno in tutta la seguente trattazione.

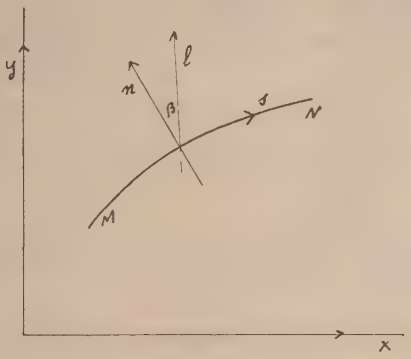


Fig. 1.

Sia s una linea qualunque tracciata nell'interno o al contorno della lamina, n la sua normale diretta, in modo che la coppia di direzioni ortogonali (s, n) sia congruente nel piano colla coppia (x, y).

Dalle formule (1) seguirà che il flusso di elettricità attraverso ds si esprimerà con

$$j_n ds = (j_x \cos nx + j_y \cos ny)\, ds = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s}\right) ds = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds\,,$$

ove l è una direzione che forma con n l'angolo β. Ed il flusso lungo MN, ossia l'intera linea s, sarà

$$(4) \qquad \int_s j_n ds = -\mathrm{K}\int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds - \lambda \mathrm{K}(\mathrm{V_N} - \mathrm{V_M}) = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds\,.$$

Analogamente avremo l'altra formula

$$(5) \qquad \int_s \mathrm{V} j_n\, ds = -\mathrm{K}\int_s \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds - \frac{\lambda \mathrm{K}}{2}(\mathrm{V_N^2} - \mathrm{V_M^2}) = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds\,.$$

Per la validità di queste formule basterà ammettere che, lungo s, V sia finita e le sue derivate prime siano finite o infinite di ordine inferiore ad un numero minore dell'unità (1).

(1) Qui e nel seguito l'ordine di infinito di una funzione in un punto si ha prendendo come infinito fondamentale la inversa della distanza al punto stesso.

Supponiamo che la linea s sia chiusa. Allora, essendo V *monodroma*, perchè ammettiamo che nessuna regione della lamina sia sede di forze elet-

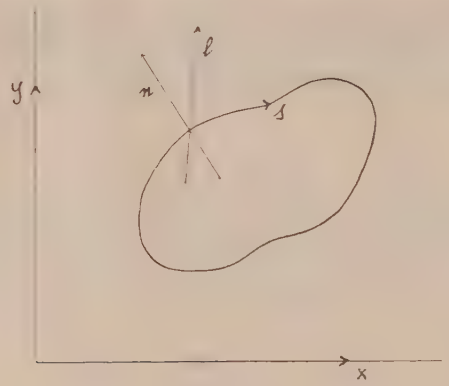


Fig. 2.

tromotrici, le formule (4) e (5) divengono:

$$\text{(A)} \qquad \int_s j_n\, ds = -\,\mathrm{K}\int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds = \frac{-\,\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds$$

$$\text{(B)} \qquad \int_s \mathrm{V} j_n\, ds = -\,\mathrm{K}\int_s \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds = \frac{-\,\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds\,.$$

3. Ciò premesso, supponiamo che la corrente entri lungo la porzione AB del contorno da un elettrodo di resistenza trascurabile, ed esca dalla porzione CD del contorno la quale costituisca pure un elettrodo di resistenza trascurabile, mentre le porzioni del contorno BC e AD siano libere ed isolate.

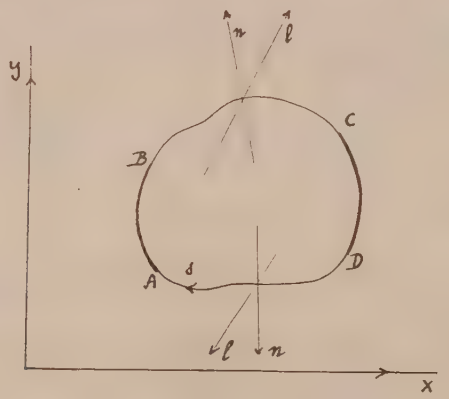


Fig. 3.

Avremo lungo AB e CD, respettivamente,

$$\mathrm{V} = \mathrm{C}_1 \quad , \quad \mathrm{V} = \mathrm{C}_2\,,$$

ove C_1 e C_2 sono costanti; e lungo BC e AD,

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 0 .$$

Nell'interno dell'area σ occupata dalla lamina, V sarà regolare ed armonica.

Ora. se chiamiamo s l'intero contorno, e supponiamo soddisfatta la condizione precedente circa l'ordine d'infinito delle derivate di V lungo s, avremo, in virtù della (B),

$$\int_{AB} V j_n \, ds + \int_{CD} V j_n \, ds = - K \int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds ,$$

giacchè, sopra BC e AD, $\frac{\partial V}{\partial l} = j_n \cos \beta$ è nullo. Quindi

$$C_1 \int_{AB} j_n \, ds + C_2 \int_{CD} j_n \, ds = - K \int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds .$$

Chiamando J la intensità totale della corrente che percorre la lamina. sarà

$$J = \int_{CD} j_n \, ds = - \int_{AB} j_n \, ds ,$$

quindi

$$(C_2 - C_1) J = - K \int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds ,$$

e, per un noto teorema sulle funzioni armoniche,

$$(C_1 - C_2) J = K \int_\sigma \Delta V \, d\sigma .$$

Da questa relazione segue che, se $C_1 = C_2 = 0$, V deve essere nulla in tutti i punti di σ, e, per conseguenza, che a dati valori di C_1 e C_2 non può corrispondere che una unica soluzione per V. Abbiamo dunque il teorema:

Noti i valori costanti del potenziale lungo gli elettrodi AB *e* CD, *la distribuzione delle correnti nella lamina è completamente determinata.*

4. Il precedente teorema si estende facilmente. Sia σ un'area nel cui interno la funzione V armonica è regolare, ed s ne sia il contorno. Come conseguenza delle (B) avremo (se, al contorno, V è finita e le sue derivate sono finite o infinite di ordini inferiori ad un numero minore di 1)

$$\int_s V \frac{\partial V}{\partial l} ds = \cos \beta \int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds = \cos \beta \int_\sigma \Delta V \, d\sigma .$$

Quindi. se in certe parti del contorno V è nulla, e nelle rimanenti è nullo il $\frac{\partial V}{\partial l}$, sarà V nulla entro σ: e perciò. se V è nota in certe parti

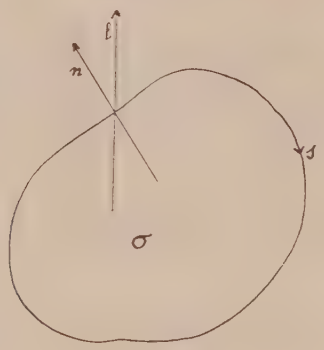


Fig. 4.

del contorno, e nelle rimanenti è noto il $\frac{\partial V}{\partial l}$, V sarà determinata entro σ. Se lungo tutto il contorno è noto solo il $\frac{\partial V}{\partial l}$, V sarà determinata a meno di una costante. La (A) ci dà la condizione a cui deve soddisfare il $\frac{\partial V}{\partial l}$:

(A') $$\int_s \frac{\partial V}{\partial l} ds = 0 .$$

5. Supponiamo, ora, che la corrente entri ad esca dalla lamina attraverso due elettrodi puntiformi A e B Riprendiamo la formula (A), e supponiamo, dapprima, che la linea s sia la linea s_a che circonda il punto A.

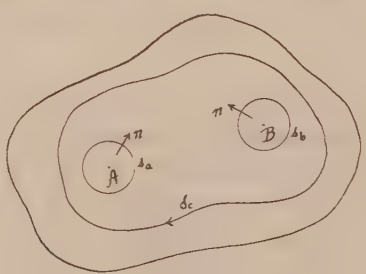


Fig. 5.

Chiamando J l'intensità della corrente, e supponendo n esterna allo spazio racchiuso da s_a, avremo

$$J = \int_{s_a} j_n \, ds_a = - K \int_{s_a} \frac{\partial V}{\partial n} ds_a ;$$

mentre, se chiamiamo s_b una linea che circonda il punto B, e n è la normale esterna allo spazio racchiuso da s_b, avremo

$$-\mathrm{J} = \int_{s_b} j_n \, ds_a = -\mathrm{K} \int_{s_b} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} \, ds_b .$$

Prendendo invece una linea s_c che abbia nell'interno A e B o escluda ambedue questi punti, avremo

$$0 = \int_{s_c} j_n \, ds_c = -\mathrm{K} \int_{s_c} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} \, ds_c .$$

Dunque, nella suddetta ipotesi, noi dovremo porre

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{J}}{2\pi\mathrm{K}} (\log r_{\mathrm{B}} - \log r_{\mathrm{A}}) + \mathrm{W} , \tag{6}$$

essendo W armonica regolare, e r_{A} ed r_{B} essendo le distanze del punto generico x, y da A e da B, e dovremo porre al contorno dell'area σ la condizione

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} = 0 , \tag{7}$$

ossia

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\mathrm{J}}{2\pi\mathrm{K}} (\log r_{\mathrm{A}} - \log r_{\mathrm{B}}) \right] . \tag{7'}$$

Ne segue che il problema della distribuzione delle correnti è ricondotto alla determinazione delle funzione armonica regolare W, di cui al contorno si conoscono i valori di $\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial l}$ dati dalla (7'). È facile il riconoscere che la condizione (A') del § 4 è soddisfatta. W resulterà determinata a meno di una costante arbitraria additiva, la quale evidentemente non ha influenza sulla legge della distribuzione delle correnti.

6. Supponiamo invece che la corrente entri da un elettrodo puntiforme A ed esca da un elettrodo BC posto al contorno e di resistenza trascurabile.

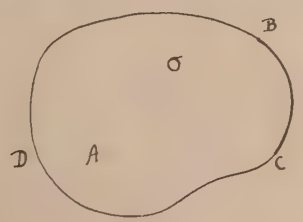


Fig. 6.

Sia J la intensità della corrente. In tale ipotesi si riconosce facilmente, con un procedimento analogo a quello tenuto nel paragrafo precedente, che si deve porre

$$\mathrm{V} = -\frac{\mathrm{J}}{2\pi\mathrm{K}} \log r_{\mathrm{A}} + \mathrm{W} ,$$

ove W è una funzione armonica regolare nell'interno di σ. Lungo la porzione libera ed isolata BCD del contorno, si dovrà avere

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{J}{2\pi K}\log r_A\right],$$

e, lungo BC,

$$W = C + \frac{J}{2\pi K}\log r_A,$$

ove C è il valore costante che deve assumere V lungo l'elettrodo BC. Quindi, se la funzione W è finita, e le sue derivate lungo s sono finite o infinite di ordine inferiore ad un numero minore di 1, essa sarà determinata entro σ (cfr. § 4), e perciò sarà determinata la legge della distribuzione delle correnti.

7. Riterremo, come si suol fare ordinariamente, che, se da un elettrodo esce una corrente di intensità J, ciò sia equivalente a dire che vi entra una corrente di intensità —J. Se dunque abbiamo un elettrodo puntiforme da cui entra la corrente I (qualunque sia il suo segno), nell'intorno di esso il potenziale sarà

$$V = -\frac{I}{2\pi K}\log r + W,$$

ove r è la distanza del punto generico x, y dall'elettrodo e W è una funzione armonica regolare nell'intorno del punto. La parte del potenziale

$$-\frac{I}{2\pi K}\log r = \frac{I}{2\pi K}\log\frac{1}{r}$$

si dirà il *potenziale dell'elettrodo* e sarà il potenziale logaritmico di un punto di massa $\frac{I}{2\pi K}$.

8. Stabiliamo adesso alcune altre formule fondamentali, da aggiungersi a quelle trovate nel § 2.

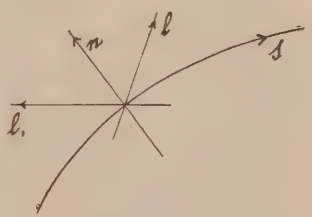


Fig. 7.

Immaginiamo di invertire il senso del campo magnetico, ossia cambiamo H in —H. Per distinguere i due casi, diremo che, nel primo, il campo magnetico è *diretto*, e nel secondo il campo magnetico è *invertito*.

Dalle formule (2) e (3) segue che K rimane inalterato, mentre λ cambia segno, ossia cambia segno l'angolo β, e, per conseguenza, la direzione l si cangia nella direzione simmetrica rispetto alla normale n, che chiameremo l_1. Se diamo un indice 1 a tutti gli elementi corrispondenti a questo caso, dovremo scrivere le formule

$$j_{1,x} = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial y}\right)$$

$$j_{1,y} = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x}\right),$$

ed avremo

$$\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial l_1} = 0$$

lungo le porzioni del contorno libere ed isolate.

Sia ora una linea qualunque $s = \mathrm{MN}$ interna o al contorno di σ, come abbiamo considerato nel § 2. Sarà

$$\mathrm{V}_1 j_n - \mathrm{V} j_{1n} = \mathrm{V}_1(j_x \cos nx + j_y \cos ny) - \mathrm{V}(j_{1x} \cos nx + j_{1y} \cos ny) =$$

$$= -\mathrm{K}\left[\mathrm{V}_1\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s}\right) - \mathrm{V}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n} - \lambda \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial s}\right)\right] =$$

$$= -\mathrm{K}\left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n}\right) - \lambda \mathrm{K} \frac{d(\mathrm{V}\mathrm{V}_1)}{ds} = \frac{-\mathrm{K}}{\cos \beta}\left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial l_1}\right)$$

e, integrando a tutta la linea s,

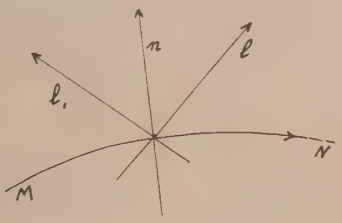


Fig. 8.

$$\int_s (\mathrm{V}_1 j_n - \mathrm{V} j_{1n})\, ds = -\mathrm{K} \int_s \left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n}\right) ds - \lambda \mathrm{K}[(\mathrm{V}\mathrm{V}_1)_\mathrm{N} - (\mathrm{V}\mathrm{V}_1)_\mathrm{M}] =$$

$$= \frac{-\mathrm{K}}{\cos \beta} \int_s \left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial l_1}\right) ds.$$

Se la linea s sarà chiusa, resulterà

$$(C) \qquad \int_s (V_1 j_n - V j_{1n})\, ds = -K \int_s \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n} \right) ds =$$

$$= \frac{-K}{\cos\beta} \int_s \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l_1} \right) ds .$$

È questa appunto una delle formule che conveniva stabilire.

Essa è suscettibile di estensione. Infatti, denotiamo con S non già una sola linea chiusa ma un insieme di linee chiuse le quali formino il contorno di un campo σ' interno a σ. Siccome per ciascuna linea chiusa vale la formula precedente, così essa varrà anche sostituendo ad s l'insieme S; e se, entro l'area σ', V e V_1 saranno regolari, si avrà prendendo n esterna al campo σ'

$$(D) \qquad \int_S (V_1 j_n - V j_{1n})\, dS = \frac{-K}{\cos\beta} \int_S \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l} \right) dS = 0 ,$$

giacchè, per il lemma di Green, si ha

$$\int_S \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n} \right) dS = 0 .$$

Supponiamo che S sia formato dall'insieme di linee chiuse S′ e dall'insieme di linee chiuse S″; allora la formula (D) si potrà ancora scrivere

$$(D') \qquad \frac{1}{\cos\beta} \int_{S'} \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l_1} \right) dS' + \int_{S''} \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n} \right) dS'' = 0 .$$

Le formule (D) e (D′), che abbiamo trovato, costituiscono delle estensioni del lemma di Green.

9. Passiamo ad alcune applicazioni delle formule precedenti.

Prendiamo V data dalla (6) colla condizione (7), e supponiamo di prendere per S′ il contorno s di σ, e per S″ due cerchi s_a e s_b aventi i

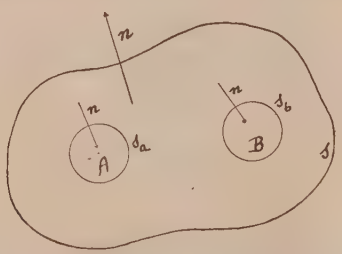


Fig. 9.

centri in A e B. Supponiamo V_1 regolare entro σ. L'area σ'' si ottiene togliendo da σ le aree incluse entro s_a e s_b; quindi sarà limitata da s,

s_a e s_b. In σ'', V e V_1 sono regolari: onde, applicando la (D'), tenendo conto che, su s, $\frac{\partial V}{\partial l} = 0$, resulterà

$$\frac{-1}{\cos\beta}\int_s V\frac{\partial V_1}{\partial l_1}ds + \int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a + \\ + \int_{s_b}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_b = 0.$$

Ma, facendo impiccolire indefinitamente i cerchi s_a e s_b, si vede che

$$\lim\int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a = \frac{J}{K}V_{1,A}$$

$$\lim\int_{s_b}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_b = -\frac{J}{K}V_{1,B},$$

ove $V_{1,A}$ e $V_{1,B}$ denotano i valori di V_1 nei punti A e B; quindi

$$V_{1,A} - V_{1,B} = \frac{K}{J\cos\beta}\int_s V\frac{\partial V_1}{\partial l_1}ds.$$

Da questa formula si deduce la proposizione seguente:

Se si conosce la distribuzione delle correnti in una lamina, quando la corrente entra da A *ed esce da* B, *ed il campo magnetico è diretto, si potrà determinare la differenza dei valori di una funzione armonica regolare nei punti* A *e* B *allorchè si conosce al contorno la sua derivata nella direzione* l_1.

Evidentemente sussiste anche l'altra proposizione:

Se si conosce la distribuzione delle correnti in una lamina, quando la corrente entra da A *ed esce da* B, *ed il campo magnetico è invertito, si potrà determinare la differenza dei valori di una funzione armonica regolare nei punti* A *e* B *allorchè si conosce al contorno la sua derivata nella direzione* l.

In altri termini, il potenziale V, corrispondente ad un *campo magnetico diretto* e ai due elettrodi puntiformi A e B, è una *funzione analoga a quella di Green*, per il caso in cui si conoscono al contorno *i valori della derivata di una funzione armonica regolare nella direzione* l_1; mentre il potenziale corrispondente ad un *campo magnetico invertito* e ai due elettrodi puntiformi A e B, è una *funzione analoga a quella di Green*, per il caso in cui si conoscono al contorno i *valori delle derivate di una funzione armonica regolare nella direzione* l.

10. Ritorniamo al caso del § 6 e supponiamo che sia $C = 0$. Sia V_1 una funzione armonica regolare entro σ. Prendiamo per S' il contorno s

della lamina e per S'' una circonferenza s_a avente il centro in A. Applicando la formula (D') resulterà

$$\frac{1}{\cos\beta}\int_{BDC} V\frac{\partial V_1}{\partial l_1}\,ds - \frac{1}{\cos\beta}\int_{BC} V_1\frac{\partial V}{\partial l}\,ds - \int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a = 0$$

e facendo impiccolire indefinitamente il cerchio s_a

$$V_{1A} = \frac{K}{J\cos\beta}\int_{BDC} V\frac{\partial V_1}{\partial l_1}\,ds - \frac{K}{J\cos\beta}\int_{BC} V_1\frac{\partial V}{\partial l}\,ds\,.$$

Dunque, *se si conosce la distribuzione delle correnti quando la corrente entra da* A *e esce dall'elettrodo* BC *ed il campo magnetico è diretto si potrà determinare il valore in* A *di una funzione armonica regolare allorchè se ne conosce il valore lungo* BC *e si conosce lungo* BDC *il valore della derivata nella direzione* l_1.

L'analoga proposizione si ha quando il campo magnetico è invertito.

11. Prendiamo ora V data dalle (6) colla condizione (7), e V dato da

$$V_1 = \frac{J_1}{2\pi K}(\log r_{B_1} - \log r_{A_1}) + W_1\,,$$

ove W_1 è una funzione armonica regolare entro σ, A_1 e B_1 sono due nuovi punti scelti in questo campo, e si ha

$$\frac{\partial V_1}{\partial l_1} = 0$$

lungo il contorno s di σ. Supponiamo che S' sia il contorno s, e S'' l'in-

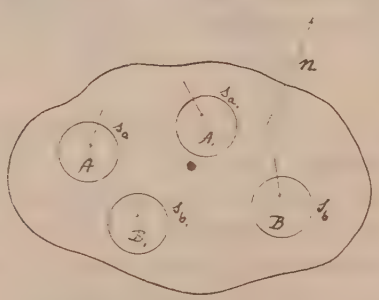


Fig. 10.

sieme dei quattro cerchi s_a, s_b, s_{a_1}, s_{b_1} aventi respettivamente i centri in A, B, A_1 e B_1.

L'area σ'' si otterrà togliendo da σ le aree racchiuse entro i quattro cerchi. In σ'', V e V_1 sono regolari; onde, applicando la (D') e tenendo conto che, su s, $\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V_1}{\partial l_1} = 0$, resulterà

$$\int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a + \int_{s_b}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_b$$

$$+\int_{s_{a_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{a_1} + \int_{s_{b_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{b_1} = 0.$$

Ora, facendo impiccolire indefinitamente i quattro cerchi, si ha facilmente

$$\lim\int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a = +\frac{J}{K}V_{1A}$$

$$\lim\int_{s_b}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_b = -\frac{J}{K}V_{1B}$$

$$\lim\int_{s_{a_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{a_1} = -\frac{J_1}{K}V_{A_1}$$

$$\lim\int_{s_{b_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{b_1} = +\frac{J_1}{K}V_{B_1},$$

quindi

$$J(V_{1B} - V_{1A}) = J_1(V_{B_1} - V_{A_1});$$

e, se le intensità J e J_1 delle correnti sono eguali,

$$V_{1B} - V_{1A} = V_{B_1} - V_{A_1}.$$

Da cui segue la seguente legge di reciprocità:

Se in una lamina conduttrice si fa passare una corrente di intensità J *sotto l'azione di un certo campo magnetico, e in due punti* A_1 *e* B_1 *si ha una differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti* A *e* B *quando si faccia entrare da* A_1 *e escire da* B_1 *la stessa corrente d'intensità* J *e si inverta il campo magnetico.*

Ho dato nel 1882 una legge di reciprocità che è un caso particolare della precedente, giacchè corrisponde al caso di correnti elettriche senza l'azione del campo magnetico. Debbo osservare, peraltro, che allora non era posta la condizione di omogeneità pel conduttore [1].

[1] *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti in un corpo qualunque.* Nuovo Cimento, ser. III, vol. XI, anno 1882.

12. Supponiamo che al contorno della lamina esistano gli elettrodi A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, ... di resistenza trascurabile e le altre parti siano libere ed isolate. Supponiamo inoltre che non esista alcun elettrodo interno. Siano $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, $J^{(3)}$, $J^{(4)}$, ... le intensità delle correnti che entrano da questi elettrodi, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, $C^{(4)}$, ... i valori del potenziale V sopra di

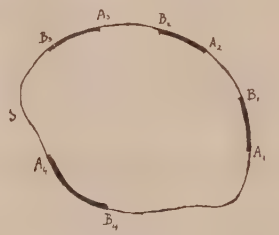


Fig. 11.

essi quando il campo magnetico è diretto. Siano poi $J_1^{(1)}$, $J_1^{(2)}$, $J_1^{(3)}$, $J_1^{(4)}$, ...; $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$, $C_1^{(4)}$, ...; V_1, le corrispondenti quantità quando il campo magnetico è invertito. Avremo evidentemente

$$\Sigma_h J^{(h)} = \Sigma_h J_1^{(h)} = 0$$

come del resto resulta dalla formula (A).

Applichiamo ora la formula (D) prendendo per S il contorno s della lamina. Avremo

$$0 = \Sigma_h \int_{A_h B_h} (V_1 j_n - V j_{1,n})\, ds = \Sigma_h (C^{(h)} J_1^{(h)} - C_1^{(h)} J^{(h)})$$

e quindi

$$\Sigma_h C_1^{(h)} J^{(h)} = \Sigma_h C^{(h)} J_1^{(h)} .$$

Se le $J^{(h)}$ sono tutte nulle escluse $J^{(1)}$ e $J^{(2)}$, e le $J_1^{(h)}$ sono pure tutte nulle escluse $J_1^{(3)}$ e $J_1^{(4)}$, avremo

$$J^{(1)} = - J^{(2)} = I$$

$$J_1^{(3)} = - J^{(4)} = I_1$$

onde

$$(C_1^{(1)} - C_1^{(2)})\, I = (C^{(3)} - C^{(4)})\, I_1$$

e se $I = I_1$.

$$C_1^{(1)} - C_1^{(2)} = C^{(3)} - C^{(4)} .$$

Queste ultime formule costituiscono dei nuovi teoremi di reciprocità di facile interpretazione (cfr. coi resultati del § 28).

13. Si può immaginare finalmente che nel caso del campo magnetico diretto, oltre gli elettrodi al contorno A_1B_1, A_2B_2, ... si abbiano degli elet-

trodi puntiformi interni $M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}, \ldots$ da cui entrino delle correnti di intensità $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, \ldots$ e nel caso del campo magnetico invertito, in luogo dei precedenti, altri elettrodi puntiformi interni $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, M_1^{(3)}, \ldots$ da cui entrino delle correnti di intensità $I_1^{(1)}, I_1^{(2)}, I_1^{(3)}, \ldots$ Sarà allora

$$\Sigma_h J^{(h)} + \Sigma_k I^{(k)} = \Sigma_h J_1^{(h)} + \Sigma_{k_1} I^{(k_1)} = 0$$

e

$$\Sigma_h C_1^{(h)} J^{(h)} + \Sigma_k V_1^{(k)} I^{(k)} = \Sigma_h C^{(h)} J_1^{(h)} + \Sigma_{k_1} V^{(k_1)} I_1^{(k_1)},$$

ove $V_1^{(k)}$ denotano i valori del potenziale V_1 nei punti $M^{(k)}$ e $V^{(k_1)}$ i valori del potenziale V nei punti $M_1^{(k_1)}$.

14. Riprendiamo le formule (1), e denotiamo con V′ la funzione coniugata delle V [1], tale cioè che

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V'}{\partial x};$$

allora le (1) potranno scriversi

$$(1') \qquad \begin{cases} j_x = -K \dfrac{\partial (V + \lambda V')}{\partial x} \\ j_y = -K \dfrac{\partial (V + \lambda V')}{\partial y} \end{cases},$$

onde, posto $V + \lambda V' = U$, avremo

$$(1'') \qquad j_x = -K \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad j_y = -K \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Lungo le porzioni del contorno libere ed isolate sarà

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0;$$

e in tutta l'area interna sarà $\Delta^2 U = 0$.

Dunque *la distribuzione delle correnti nella lamina avviene come se non vi fosse il campo magnetico, ma il potenziale fosse* U *anzichè* V, *e la conducibilità si conservasse eguale a* K. Siccome K è costante, così le linee di corrente sono indipendenti da K.

La funzione U si chiamerà la *funzione fondamentale della distribuzione delle correnti nella lamina*, o, più semplicemente, la *funzione fondamentale*. Essa non coincide col *potenziale*, altro che se il campo magnetico è nullo. Allorchè si conosce il potenziale V, per ottenere U basta la operazione

$$(E) \qquad U = V + \lambda V' = \frac{V \cos \beta + V' \operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}.$$

[1] Essa sarà determinata a meno di una costante arbitraria additiva.

Risolviamo adesso il problema di *calcolare il potenziale quando si conosce la funzione fondamentale.*

Faremo, come precedentemente, uso dell'aggiunta di un apice per denotare la funzione coniugata di una funzione armonica data. Quindi

$$U' = V' - \lambda V ; \tag{8}$$

onde, tenendo conto della (E), resulterà

$$V = \frac{U - \lambda U'}{1 + \lambda^2} = (U \cos\beta - U' \operatorname{sen}\beta) \cos\beta . \tag{E'}$$

Il problema propostoci è quindi risoluto.

Se poniamo

$$x + iy = z \quad , \quad U + iU' = f(z) \quad , \quad V + iV' = \varphi(z) ,$$

avremo

$$f(z) = \frac{e^{-i\beta}}{\cos\beta}\, \varphi(z) . \tag{E''}$$

Fisica. — *Arco e scintilla. (Rilievi sopra una Nota del prof. A. Occhialini).* Nota di M. La Rosa, presentata del Corrispondente D. Macaluso.

Varie circostanze mi hanno impedito, finora, di mettere insieme alcuni rilievi sulla Nota *Scintilla ed arco*, del prof. Occhialini (1), nella quale sono chiamato in causa.

E per prima cosa faccio questione, dirò così, di esattezza storica; perchè non credo che il mio nome venga ben a posto citato, in una discussione intorno alla *vera* distinzione fra arco e scintilla, non essendomi fino a questo momento occupato di un tale argomento.

Nel lavoro, di cui il prof. Occhialini cita un passo (2), ho sostenuto semplicemente questa tesi: « che *la natura dello spettro emesso da un vapore o gas attraversato dalla scarica* (e forse, più generalmente, eccitato in un modo qualsiasi) *debba dipendere essenzialmente dalla potenza spesa nell'unità di massa eccitata, e che limitata e secondaria debba essere l'influenza del modo con cui tale potenza viene introdotta* » (3).

Ho fatto, dunque, soltanto questione di struttura spettrale, sostenendo il concetto che questa *non dipenda dalle modalità della scarica, dalla peculiarità del fenomeno che produce* l'emissione, e, più generalmente, dai

(1) Nuovo Cimento, vol. VII, ser. VI, pag. 365 (1914).
(2) Mem Lincei, vol. VII, pag. 451, giugno 1908.
(3) loc. cit., pag. 466, capoverso 3°.

mezzi — elettrici o no — impiegati per l'eccitazione luminosa; ma che dipenda soltanto dal valore della potenza specifica, il quale dovrebbe riguardarsi come *l'unico paramento che determina ciascuna struttura spettrale.*

Tutta la discussione, che forma la seconda parte del mio lavoro, è informata a questo concetto; e credo che, chiunque voglia prendersi la pena di rileggerla, anche senza soverchia attenzione, non potrà non persuadersene.

Non discuto quindi di più su questo punto; nè per spiegare quale senso abbia il passo citato dall'Occhialini, quando sia letto nel contesto del discorso di cui fa parte; nè per rilevare la contraddizione completa che esiste tra questo concetto fondamentale del mio lavoro, ed il proposito che mi si vuole attribuire: quello di ostinarmi a chiamare con uno, piuttosto che con un altro nome, la forma di scarica su cui avevo sperimentato.

Non è dunque la divergenza nei nomi, che mi preoccupa, e che mi spinge a scrivere queste brevi osservazioni; tale questione, nè mi tocca, nè mi tenta.

Alcune divergenze, di natura più profonda, esistono tra fatti riferiti dall'Occhialini, e fatti da me, e da molti altri, osservati; sulle quali sento il bisogno di fermarmi, perchè esse potrebbero screditare la mia opinione.

E però, mio malgrado, debbo entrare nell'esame del lavoro in parola.

Il concetto, su cui l'Occhialini da vario tempo insiste, è questo: ogni forma di scarica s'inizia con una fase di preparazione, che è una *vera scintilla*; e passa, dopo un certo intervallo di tempo, ad una forma più stabile, che è un *arco*, oppure un *bagliore* (pag. 367, 35° rigo; e pag. 368).

Nulla avrei da obiettare ad un tale modo di esprimersi, se l'A. volesse limitarsi ad una semplice questione di nomenclatura. L'esistenza di una fase preparatoria in ogni forma di scarica è stata accertata con numerose esperienze, fra le quali sono degne di ricordo quelle di Battelli e Magri per la scintilla, quella di Stark e di Simon per l'arco; e non saprei non elogiare il proposito di distinguere, con convenienti nomi, ciascuna delle fasi.

Ma il disaccordo nasce, quando si vogliono attribuire, a quella fase a cui si riserba il nome di scintilla (e cioè alla preparatoria), tutti i caratteri che appartengono al fenomeno, che finora è stato chiamato *scintilla*; e più precisamente si manifesta come inevitabile, quando si vuole sostenere, che a detta fase preparatoria corrisponde sempre quel tipo di spettro, che finora è stato distinto col nome di « spettro di scintilla ».

Non mi fermo a discutere le esperienze sulle « scintille troncate », di cui l'A. fa tanto uso per la sua dimostrazione; solo osservo che esse avrebbero bisogno di un'interpretazione più ponderata, in cui fosse tenuto il debito conto dell'alterazione inevitabile della resistenza complessiva del circuito elettrico, dovuta, alla sostituzione dell'elettrodo liquido a quello metallico; sostituzione, che, facendo crescere lo smorzamento, può dar luogo a tutte,

o a parte delle modificazioni che sono state attribuite alla presenza dell'elettrodo *non arroventabile* (1).

Debbo però fare un rilievo intorno alla interpretazione dei risultati dal punto di vista spettrale, in relazione alle idee propugnate dall'A.

Stando a queste idee, i due spettri ottenuti, lasciando inalterate le costanti del circuito e sostituendo l'elettrodo liquido a quello metallico dovrebbero semplicemente differire per gli elementi spettrali caratteristici della seconda fase della scarica, cioè di quella che si identifica con un arco, e che viene soppressa dalla sostituzione dell'elettrodo; eppure la semplice ispezione degli spettrogrammi riprodotti nel lavoro dell'A. mostra tutto il contrario: nello spettro emesso dalla scintilla troncata, mancano tutte le righe e le bande del gas, e tutte le righe di alta eccitazione del vapore metallico, ossia proprio gli elementi spettrali emessi dalla pilota, e dalle primissime oscillazioni (si confronti in proposito la bella Memoria di Battelli e Magri) (2).

L'A. stesso riconosce che lo spettro emesso dalla scintilla troncata si riduce a quello d'arco, o anche a quello di fiamma.

Egli stesso dunque ci offre un altro esempio, in cui l'aeriforme eccitato dalla fase iniziale della scarica — quella fase a cui deve essere riserbato il nome di scintilla, e che deve possedere tutti i caratteri distintivi della scintilla, *la struttura spettrale compresa* (secondo le affermazioni di lui, pag. 376, 24° rigo) — emette invece uno spettro di arco, o di fiamma.

Ma più importante è, per me, quanto l'A. scrive intorno allo spettro della fase iniziale dell'arco (§ 6, pag. 373), poichè i fatti, ivi riferiti, vengono direttamente in contraddizione con quelli da me osservati.

L'A. afferma che l'arco prodotto fra un elettrodo freddo (positivo) e l'elettrodo negativo di un arco ausiliario, reso intermittente mercè l'impiego di un campo magnetico, convenientemente orientato, dà sempre uno spettro di scintilla, *senza l'impiego di condensatori.*

Un tale risultato potrebbe far credere che la struttura spettrale non è vincolata all'impiego di una grande potenza, ma — conformemente alle vedute dell'A. — al tipo di scarica, al suo carattere transitorio.

Quest'affermazione, da parte dell'Occhialini, non è nuova. Già un'altra volta egli riferì che l'arco fra carboni, nella fase iniziale, emette uno spettro di righe.

Dubitai, allora, che si facesse confusione fra questo spettro di righe, e lo spettro di scintilla del carbonio, costituito da righe di alta eccitazione.

Al mio dubbio dava fondamento appunto la tendenza, già manifestata dall'Occhialini, di identificare questa fase iniziale dell'arco, con una scintilla

(1) Non è possibile dalla Nota Occhialini farsi un'idea dell'influenza che tale sostituzione avrebbe potuto produrre, perchè l'A. ha trascurato di dare qualsiasi indicazione sulla grandezza degli elementi elettrici e sulle dimensioni del vaso.

(2) Mem. Lincei, vol. VII, fasc. IX (1909).

vera e propria; e, per conseguenza, a sostituire quest'intespretazione a quella, da me già sviluppata, intorno ai fenomeni di trasformazione spettrale, che avevo studiati.

Colsi perciò l'occasione di un successivo lavoro (1), per mettere nei giusti termini i fatti. Questo spettro di righe, dall'A. osservato, è quello delle righe di *fiamma* e di *arco* dovute alle impurezze metalliche, contenute nei carboni. Esso si osserva identicamente nelle esperienze da me fatte, sopra un bastoncino di carbone arroventato dalla corrente elettrica, tutte le volte che la quantità di vapore di carbonio prodotta è molto piccola; e si osserva ancora — come sanno tutti coloro che si sono occupati di spettroscopia dell'arco fra carboni — in un arco comune, negli istanti in cui esso diviene instabile, e però cigola. Di questi fatti diedi allora una spiegazione — li ascrissi alla mancata formazione dei carburi metallici, per la povertà di vapore di carbonio — la quale è stata accettata e confermata (2).

Però, di fronte alla nuova affermazione dell'A., non mi sono acquietato nel facile suggerimento che l'equivoco non fosse ancora chiarito; ed ho voluto ripetere le esperienze riferite, con quella fedeltà che le scarse indicazioni dell'A. mi hanno consentito.

Ho prodotto un arco fra carboni (3), alimentato da una corrente di 6 amp. circa, mediante i poli —150 e 0 Volta della nostra rete urbana, attraverso ad un reostato a lampade; ho collegato un terzo elettrodo di carbone, disposto normalmente all'asse dei primi due col polo +150 della stessa rete, attraverso ad un altro reostato che permetteva di far variare la resistenza da 40 a 250 ohms circa.

Ho attaccato in serie col primo arco un'elettro-magnete, a ferro di cavallo, e l'ho disposto in modo da avere il campo — nella regione in cui gli elettrodi erano affacciati — nel senso indicato dall'A., cioè secondo l'asse del primo arco; con ciò ho introdotto nel circuito principale l'autoinduzione consigliata. Ho ottenuto così la descritta successione di scariche, la quale, a seconda della resistenza in serie col terzo elettrodo, genera o un crepitìo paragonabile a quello di una macchina elettrica in funzione, o un suono quasi musicale.

Per osservare bene lo spettro, ho proiettato le due scariche sopra la fenditura di uno spettroscopio Hilgher, in modo da avere contemporaneamente sott'occhio, nella regione inferiore del campo di osservazione, lo spettro dell'arco ausiliario, e nella superiore lo spettro della scarica intermittente. Avverto che, mentre l'arco si proiettava col suo asse in direzione normale

(1) Nuovo Cimento, vol. XX, pag. 352 (1910).

(2) Cfr. Kayser, Handb. d. Spektr., Bd. VI, pag. 96, an. 1912 (Hirzel).

(3) Poichè l'A. non indica esplicitamente la sostanza degli elettrodi, mi credo autorizzato a ritenerli di carbone.

alla lunghezza della fenditura, l'altra scarica si proiettava con l'asse nella direzione di questa.

Osservazioni prolungate, e ripetute con diversi valori dell'intensità, mi hanno mostrato che questa scarica, *costituita dalla successione di fasi iniziali dell'arco, ha la identica struttura spettrale dell'arco comune*, salvo la ripartizione delle intensità: presenta, cioè, i medesimi gruppi di bande, a cui si uniscono le medesime righe di impurezze metalliche. Tracce delle righe di scintilla del carbonio non sono mai presenti; e si badi che alcune di esse, come la 4267, hanno tali caratteri e sono di solito così intense, che, se presenti, non possono sfuggire, o venire confuse con altre.

Negli istanti in cui la scarica ha rapidi sbalzi di tensione e di intensità, si osserva, come dice l'A., uno spettro di righe brillantissimo; ma esso è quello ben noto, di cui avanti ho discorso.

Questo spettro — insisto — non ha nulla da vedere con lo spettro *di alta eccitazione del carbonio, emesso dalla scintilla condensata*, o dall'arco musicale, che studiai nel lavoro più volte ricordato.

Si chiami arco o scintilla la forma di scarica in parola, a me poco importa; è certo, però, che il suo spettro è quello dell'arco! Il nuovo fatto è ancora qui conforme agli antichi, e contraddice nettamente alla seconda parte della proposizione enunciata dall'A.

Della prima parte — la quale afferma che la seconda fase di una scintilla è un arco — non ho ragione di occuparmi. Osservo, però, che non solo le esperienze su cui l'A. si appoggia non hanno grande valore, per quanto ho già detto; ma che, *riguardando come fasi distinte la pilota e la scarica oscillatoria nel vapore* — e ciò secondo il criterio comune —, l'affermazione in parola è contraddetta dalle esperienze di Hemsalech e da quelle di Battelli e Magri, che ho avanti ricordate.

Infatti esse dimostrano che *lo spettro di alta eccitazione* (cioè di scintilla) *del vapore, viene emesso anche nelle prime oscillazioni della seconda fase.*

Ogni altro criterio di distinzione mi sembrerebbe incerto ed artificioso. Che l'aureola di vapore — la quale raggiunge il suo massimo sviluppo nelle ultime oscillazioni — emetta uno spettro di arco, è un fatto oramai troppo vecchio; riferito da Hemsalech, e consacrato nella spettroscopia della scarica.

Quanto sono venuto dicendo fin qui, non pregiudica punto il mio modo di vedere, nei riguardi della trasformazione dei fenomeni della scarica elettrica, dall'uno ad altro tipo. La opinione che il prof. Occhialini mi attribuisce, non si concilia, a me sembra, così col punto di vista catastrofico, come con l'evoluzionista. Se mai, egli avrebbe potuto tacciarmi di cocciuto conservatorismo, se avessi voluto ostinarmi a mantenere il nome di arco ad un fenomeno, che più non ne possiede tutte le proprietà (in particolare lo spet ro). Ma questo non è il caso.

Nondimeno, non voglio sfuggire l'occasione di confermare il pensiero, che in altra occasione manifestai, intorno alla trasformazione elettrica, che necessariamente si accoppia con la trasformazione spettrale (1).

In proposito credo che allo stato attuale delle nostre conoscenze si possa sostenere la veduta, che il prof. Corbino ha chiamato, con parola felice, evoluzionista.

Ritengo appunto che, nei fenomeni di scarica comunemente studiati, ci s'incontri di frequente con una sovrapposizione di quelle forme, che vengono adottate come tipiche. Queste forme tipiche, che non sono puri schemi ideali, ma bensì processi reali, si ottengono in condizioni bene definite. Alterando le quali, la scarica, più non è soltanto arco, o bagliore, o scintilla, ma partecipa dei caratteri di due tipi almeno. La continuità della trasformazione spettrale, a cui si accompagna una successione, pure graduale, di mutamenti negli elementi elettrici, giustifica, secondo me, questo modo di vedere.

Il quale, per altro, non implica affatto la negazione che arco e bagliore, per es., siano due processi, che decorrono con caratteri interamente distinti, se presi ciascuno nelle condizioni tipiche; poichè esso afferma solo la possibilità di passare dall'uno all'altro di questi processi, con una successione di mutamenti graduali.

E del resto non mancano fatti, che potrebbero mettere in imbarazzo l'atteggiamento opposto; il catastrofico, dall'A. propugnato.

Ricorda ognuno, che oramai si conoscono parecchie forme di arco, il cui numero non è ancora stabilito, e va sempre crescendo. Nella letteratura che mi è nota, sono descritti già sei tipi diversi di arco, che si trasformano l'uno nell'altro, e che sempre più si avvicinano alla scarica a bagliore. E fra gli osservatori di questi fatti — mi piace ricordarlo — si annoverano Arons e Child, veri specialisti in materia.

(1) M. La Rosa, *Ricerche spettrali sull'arco fra carboni a piccole pressioni.* Nuovo Cimento, vol. IV, agosto 1912.

Fisica terrestre. — *Il recente terremoto nella Marsica e gli strumenti sismici*. Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio E. Millosevich.

Il focolare sismico di questa nuova e tremenda convulsione del suolo, la quale ha seminato di tante stragi e rovine l'Italia centrale, è lungi ancora dall'essere ben determinato. Però, dalle notizie pubblicate dai giornali e raccolte da persone che si sono, a scopo di studio, recate nei luoghi più colpiti, parrebbe che l'epicentro non dovesse distar troppo dal bacino del Fucino, e più precisamente dal versante meridionale del M. Velino. Senonchè il riscontro d'incalcolabili danni anche nella valle del Liri ci lascia perplessi se nel terremoto attuale non siasi in presenza di due centri sismici ben distinti, anzichè d'uno solo, i quali siano entrati in azione nello stesso istante, oppure immediatamente, o quasi, l'uno appresso a l'altro. In quest'ultima ipotesi, il 2° terremoto rientrerebbe nella categoria di quelli che in sismologia son detti *à relais*, e cioè che, già preparati da lunga mano, scoppiano proprio al passaggio delle onde sismiche generate altrove. Non si può neppure escludere che l'epicentro abbia avuto una forma lineare di notevole lunghezza e che, per ragioni geologiche, abbia determinato le maggiori rovine in due punti, tra loro molto distanti (1). Ci si può domandare quale di questi due punti abbia agito per il primo, tanto nel caso di due epicentri distinti, quanto nell'ipotesi d'un unico dislocamento di forma allungata. La risposta può essere resa meno difficile dal prendere in considerazione le ore precise in cui incominciò il movimento negli Osservatorii sismici più vicini, che sono precisamente quelli di *Montecassino*, *Rocca di Papa* e *Roma*. L'inizio esatto dei sismogrammi è stato: a $7^h52^m50^s$ (2) per la 1ª località, a $7^h52^m54^s \pm 3^s$ (3) per la 2ª e $7^h52^m55^s \pm 2^s$ (4) per la 3ª. È vero che queste

(1) L'aggravamento dei danni si è realmente osservato, qua e là, anche in altri luoghi, ad es. a *Poggio Nativo* in Sabina, a notevole distanza dall'area epicentrale; ma sembra che in detto paese le maggiori rovine siano dovute ad un contemporaneo assestamento del sottosuolo, già minato dalle piogge straordinarie di quest'inverno.

(2) Questo dato parrebbe irreprensibile, in seguito alle minuziose spiegazioni che il solerte direttore dell'Osservatorio di Montecassino s'è compiaciuto comunicarmi, sia per ciò che concerne il tempo campione, sia per quanto riguarda il rilevamento dell'ora sul sismogramma.

(3) Questa è l'incertezza inevitabile nelle ore di Rocca di Papa, dovuta al fatto principale che il tempo campione è dedotto dalla caduta, a mezzogiorno preciso, della palla del Collegio romano a Roma; caduta che spesso, specie nell'inverno, non è visibile a causa di vicende atmosferiche. E questo stato di cose viene naturalmente aggravato dalla mancanza d'un vero pendolo astronomico e, meglio, d'un cronometro di alta precisione (per non potersi arrestare anche in occasione di scosse più o meno sensibili) i quali sarebbero in grado di mantenere il tempo anche per molti giorni di seguito. Questa mancanza diverrebbe, senza dubbio, meno dannosa, qualora fosse permessa la recezione del tempo per mezzo della telegrafia afila, o si potesse con facilità disporre del telegrafo o del telefono, ciò che attualmente non è possibile.

(4) L'incertezza è minore, in confronto di Rocca di Papa, perchè il segnale del mezzodì

tre località si possono trovare a distanze alquanto diverse dal punto da cui per primo s'è irraggiato lo scuotimento; ma la 1ª ora, che anticipa di ben 4-5 secondi, starebbe a provare che l'Osservatorio di Montecassino è stato di molto il più vicino, data la notevole velocità delle onde sismiche, come vedremo appresso.

Se però la vicinanza di questi tre Osservatorii alla regione epicentrale è stata utile per il rilevamento dell'ora esatta, allo scopo di poter calcolare con sicurezza la velocità delle onde sismiche fino ai più lontani Osservatorî del mondo intero, disgraziatamente ben poco s'è potuto dedurre dai sismogrammi, perchè appunto, a causa del troppo energico scuotimento del suolo (grado VII-VIII c. della scala Mercalli), gli strumenti, specie i più sensibili, dei predetti tre Osservatorii furono immediatamente, o quasi, posti fuori d'azione, sia in seguito alla caduta delle stesse penne scriventi, sia pel fatto che le masse pendolari urtarono ripetutamente contro le apposite viti che ne limitano l'oscillazione. Ciò sta a provare, una volta di più, come non sia prudente, ai fini degli studî sismici, di fondare Osservatorî di 1° ordine, e destinati anche ai terremoti mondiali, in regioni di alta sismicità. I danni subìti dai miei microsismometrografi furono tali che uno di essi, il più sensibile, con massa di ben 1600 kg. ed ingrandimento di c. 300 volte, fu rimesso a posto soltanto ad 8^h37^m, e l'altro, più modesto, a 9^h25^m, sicchè andò perduta la registrazione di numerose repliche che seguirono, a breve distanza, la grande scossa delle 7^h53^m c. Fu più fortunato il mio *sismografo a pendoli orizzontali* installato in Roma nell'atrio dell'Uff. centr. di met. e geod., poichè, in virtù del suo minore ingrandimento

---

è sempre visibile a Roma, e con il medesimo si regola ogni giorno il cronometro collegato elettricamente al sismografo.

È interessante il far rilevare che mentre l'inizio esatto dello scuotimento del suolo s'ebbe in Roma alle $7^h\,52^m\,55^s$, invece, da notizie cortesemente comunicatemi dal comm. prof. E. Millosevich, l'ora di arresto di un pendolo astronomico del R. Oss. Astr. al Collegio Romano, ed il cui piano d'oscillazione era esattamente nel meridiano, avvenne ben più tardi, e cioè alle $7^h\,53^m\,24^s$, quando lo scuotimento sensibile era già forse cessato. Ad un'ora quasi identica ($7^h\,53^m\,26^s$) si arrestò un orologio elettrico Hipp dello stesso Osservatorio, a corto pendolo ed oscillante in direzione E-W. Anche a Rocca di Papa l'unico orologio a pendolo posseduto e di cui si conosceva la correzione, fu trovato fermo alle $7^h\,53^m\,3^s$. Da ciò si vede, una volta di più, quanto si sarebbe andati lontano dal vero se, nel calcolo della velocità delle onde sismiche, in mancanza dei dati orarî ricavati dai sismografi di M. Cassino, Rocca di Papa e Roma, si fosse presa in seria considerazione l'ora d'arresto degli anzidetti pendoli, appunto perchè perfettamente regolati. Su questa grave questione io non ho mancato di richiamare più volte l'attenzione dell'Accademia e segnatamente nello studio sulla velocità delle onde sismiche del terremoto andaluso del 25 dic. 1884, presentato nelle sedute del 18 e 25 nov. 1894. Per questo terremoto non mancò allora chi volle basare il calcolo della velocità esclusivamente sull'ora di arresto di due pendoli astronomici dell'Osserv. di S. Fernando presso Cadice, e giunge così alla strana conclusione che la velocità decresceva notevolmente con la distanza!

e della maggiore semplicità dell'apparato amplificatore, potè continuare a ben funzionare, e così fu in grado di registrare anche le prime repliche.

Un fatto importantissimo, che per la prima volta si è potuto ben assodare, grazie alla vicinanza di strumenti extra-sensibili all'area epicentrale d'un violento terremoto, è stato lo straordinario numero di repliche che lo hanno seguìto. Così, dal più potente microsismometrografo di Rocca di Papa si registrarono ben 240 scosse dalle 8^h37^m fino alle 24^h dello stesso giorno 13: e questo numero è inferiore al vero, pel fatto che lo strumento non potè funzionare dalle 7^h53^m alle 8^h37^m. Il numero delle repliche scese a 120, 88, 38, 30 ecc. nei giorni successivi. Fino a tutto ieri (6 febbraio) il numero delle repliche è stato di quasi 750, di cui solo una trentina furono più o meno lievemente sentite all'Osservatorio o nel sottostante paese. È anche verosimile che molte altre registrazioni di minore entità siano andate perdute, per essere rimaste mascherate dall'agitazione microsismica, di cui è quasi sempre preda questo potente microsismometrografo. Per chi riguardava lo strumento, era stupefacente la ripetizione di tante repliche che si susseguivano talora alla distanza di men di un minuto e che testimoniavano la quasi continua convulsione del suolo nell'area epicentrale, sebbene alla distanza di ben 70 km.! La più parte di dette registrazioni sono così piccole da essere probabile che perfino colà siano sfuggite ai sensi dell'uomo. Tutto ciò dimostra l'enorme progresso realizzato in sismometria negli ultimi anni. Ciò è tanto vero, che un altro mio sismometrografo, che pur aveva figurato con onore all'Esposizione di Parigi del 1900, non è stato in grado di registrare che $^1/_3$ circa delle repliche sopra indicate. Si può bene immaginare il lavoro immenso che si è avuto in quest'occasione all'Osservatorio da me diretto e, si può dire, l'eroica abnegazione del ristrettissimo personale (assistente e custode) che vi ha dimora fissa e che è costretto anche di notte a prestare servizio in seguito ai continui allarmi dati dai sismoscopî (1). Quasi sempre si tratta, è vero, di scosse strumentali, che non avrebbero bisogno dell'intervento del personale; ma chi potrebbe garantire che talora non sopraggiunga il forte contraccolpo di qualche violento e lontano terremoto che ponga fuori di azione gli strumenti più delicati, come avvenne nei terremoti calabri del 1905 e 1908 e in varî altri, di modo che s'interrompa il loro prezioso funzionamento, specie di notte?

* * *

Chiudo la presente Nota col riportare le ore relative all'inizio della registrazione avutasi in molti altri Osservatorî italiani ed in alcuni anche

(1) Tra i medesimi s'è comportato in modo ammirabile il mio *sismoscopio a doppio effetto* per scosse ondulatorie. Nè si può supporre che quello di Rocca di Papa abbia una costruzione speciale, poichè il direttore dell'Osservatorio di Montecassino mi ha comunicato che un altro sismoscopio dello stesso modello, colà in azione, ha potuto indicare tutte le 421 repliche che sono state registrate da quei sismografi fino al 1° febbraio.

esteri, dai quali fino ad oggi m'è stato possibile avere notizie (1). E poichè non è possibile, per adesso, di conoscere con esattezza l'epicentro del nostro terremoto, mi limiterò a riportare le 20 località, per le quali si conosce l'ora, in ordine della loro distanza da *Avezzano* che, com'è noto, è restata completamente distrutta e per tal fatto non può trovarsi troppo discosta dal focolare sismico. Assunta dunque Avezzano quale epicentro provvisorio, ho voluto fare anche un tentativo per il calcolo della velocità superficiale delle onde sismiche, assumendo quale punto di partenza l'ora media ($7^h52^m53^s$) dei tre Osservatorî di Montecassino, Rocca di Papa e Roma, i più vicini ad Avezzano, e ponendo a suo riscontro l'ora di tutti gli altri Osservatorî. All'ora media, prescelta quale punto di partenza, corrisponde la distanza di 70 km., che è appunto la media delle distanze dei tre Osservatorî anzidetti dalla città di Avezzano.

Distanza da Avezzano	Località	Ore osservate (t. m. E. C.)	Distanze percorse	Tempi impiegati	Velocità al secondo
		h m s			
Km. 0	Avezzano				
» 64 c.	Montecassino . .	7 52 50			
» 68 c.	Rocca di Papa .	7 52 54			
» 78 c.	Roma	7 52 55			
» **70**	Media	**7 52 53**			
» 150 c.	Ischia	7 53 12	Km. 80 c.	sec. 19	m. 4210 c.
» 160 c.	Valle di Pompei	7 53 10	» 90 c.	» 17	» 5290 c.
» 220 c.	Siena (Osservanza)	7 53 0	» 150 c.	» (7)	» (21.430 c.)
» 320 c.	Pola	7 53 27	» 250 c.	» 34	» 7350 c.
» 380 c.	Venezia	7 55 37	» 310 c.	» (164)	» (1890 c.)
» 390 c.	Padova	7 53 39	» 320 c.	» 46	» 6960 c
» 400 c	Trieste	7 53 39	» 330 c.	» 46	» 7170 c.
» 410 c.	Treviso	7 53 31	» 340 c.	» 38	» 8950 c.
» 440 c.	Mileto	7 53 40	» 370 c.	» 47	» 7870 c.
» 500 c.	Catania	7 54 18	» 430 c.	» 85	» 5060 c.
» 530 c.	Carloforte(Sard.)	7 54 37	» 460 c.	» 104	» 4420 c.
» 560 c.	Moncalieri	7 54 6	» 490 c.	» 73	» 6710 c.
» 580 c.	Graz	7 53 59	» 510 c.	» 66	» 7730 c.
» 600 c.	Domodossola . .	7 54 30	» 530 c.	» 97	» 5460 c.
» 720 c.	Vienna	7 54 16	» 650 c.	» 83	» 7830 c.
» 1300 c.	Amburgo	7 55 33	» 1230 c.	» 160	» 7690 c.
» 1540 c.	Granata	7 55 44	» 1470 c.	» 171	» 8600 c.

Media generale m. **7330** c.

(1) Negli Osservatorî di *Milano* e di *Quarto Castello* (presso Firenze) gli strumenti sismici si trovarono accidentalmente fuori di azione; da altri Osservatorî non ho avuto ancora risposta.

Scorrendo l'ultima colonna, salta subito agli occhi la forte discordanza per la velocità che risulta per *Siena*, la cui ora è evidentemente troppo in anticipo; e se il tempo campione fosse inoppugnabile, bisognerebbe ricercare la causa dell'errore o forse nella così detta *parallasse* degli stili scriventi o nell'essersi considerato, quale principio della perturbazione sismica, qualche rinforzo nell'agitazione microsismica di cui fosse stato per caso preda quel sismografo. Per giustificare, invece, la velocità troppo piccola che vien fuori per *Venezia*, bisogna pensare o a qualche equivoco nella misura della *parallasse*, ovvero a poca sensibilità dello strumento il quale probabilmente s'è mosso in ritardo, oppure al fatto che l'inizio della registrazione non era visibile a causa di agitazione abituale nello strumento. Colpiscono pure le tenui velocità relative ad *Ischia* ed a *Valle di Pompei*; ma considerata la distanza relativamente piccola di questi due Osservatorî dall'epicentro, può essere che la stessa incerta posizione di quest'ultimo basti a spiegare l'anomalia, tanto più che queste due località si trovano dalla stessa parte. La minore velocità, spettante all'Osservatorio di *Carloforte*, è giustificata dal fatto che il principio della registrazione, a quanto mi ha scritto quel direttore, è rimasto realmente mascherato da piccole tracce di oscillazioni prodotte da vento. Dà, infine, a pensare la poca concordanza della velocità che si ottiene per *Catania* e *Domodossola*, per rispetto alle altre più sicure, e forse la si potrebbe anche qui attribuire alla difficoltà di riconoscere il vero inizio della registrazione in mezzo all'agitazione microsismica, quando non si volesse invocare l'insufficiente sensibilità di quei sismografi, ai quali potrebbero essere sfuggite le prime onde, meno intense ma più veloci. Nè è lecito di spiegare l'anomalia con la diversa direzione nel percorso delle onde sismiche, poichè Catania e Domodossola si trovano rispettivamente non troppo discoste da Mileto e Moncalieri, per i quali due ultimi Osservatorî s'ebbero velocità ben più notevoli.

Ponendo quindi in disparte tutti i predetti 7 Osservatorî, per i quali, per una ragione o per l'altra, si nutre qualche sospetto, riunisco qui sotto i 13 rimanenti, con a fianco la loro distanza da Avezzano, il rispettivo dato orario e la velocità che ne risulta:

Distanza da Avezzano	Località	Ora dell'inizio	Velocità al secondo
Km. 70 c.	M. Cassino Rocca di Papa Roma	$7^h\,52^m\,53^s$	—
» 320 c.	Pola	» 53 27	m. 7350 c.
» 390 c.	Padova	» » 39	» 6960 c.
» 400 c.	Trieste	» » 39	» 7170 c.
» 410 c.	Treviso.	» » 31	» 8950 c.
» 440 c.	Mileto	» » 40	» 7870 c.
» 560 c.	Moncalieri. . .	» 54 6	» 6710 c.
» 580 c.	Graz	» » 30	» 7730 c.
» 720 c.	Vienna	» » 16	» 7830 c.
» 1300 c.	Amburgo. . . .	» 55 33	» 7690 c.
» 1540 c.	Granata	» » 44	» 8600 c.
		Media . .	m. 7690 c.

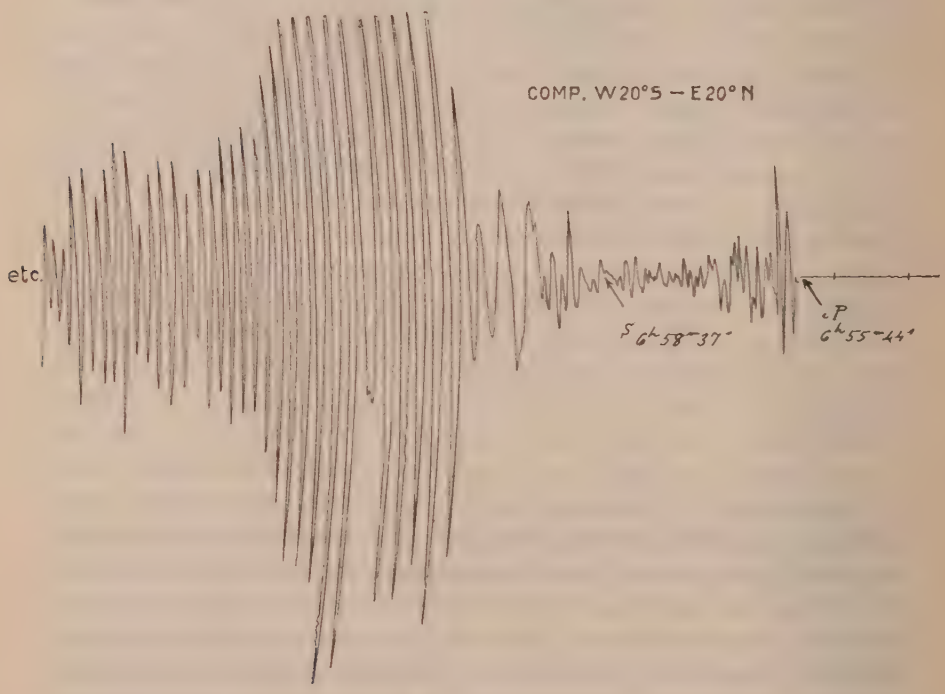
Queste velocità oscillano da un minimo di m. 6960 (Padova) ad un massimo di m. 8950 (Treviso); ed il loro valore medio di c. 7690 m. è di poco superiore alla media generale sopra trovata, ed è quasi identico a quello (m. 7680) da me trovato pel terremoto nelle isole Jonie, del 1912 (1). Basandoci su questa velocità media di 7690 metri al secondo, e supponendo che la medesima non si discosti troppo da quella con cui effettivamente si propagarono le onde sismiche dal presunto epicentro fino alla distanza di 70 km., troviamo che quest'ultima è stata percorsa in circa 9 secondi; e perciò l'ora all'epicentro, provvisoriamente da noi assunto, sarebbe:

$$7^h\,52^m\,53^s - 9^s = 7^h\,52^m\,44^s.$$

Infine, ritengo importante di riportare qui appresso il *fac-simile* della prima porzione di uno dei sismogrammi, ottenuti nella importante Stazione sismologica di *Cartuja* a Granata, in occasione del terremoto di cui ci siamo qui occupati. Questo bel sismogramma (che io debbo alla cortesia del reverendo P. Manuel M.ª S. Navarro Neumann, il quale dirige con tanto amore e con tanta abilità il predetto Osservatorio) fu tracciato da un *pendolo bifilare* oscillante in direzione N-S, con massa di kg. 425, periodo di 13^s,

(1) G. Agamennone, *Il terremoto del 24 gennaio 1912 nelle isole Jonie e sua velocità di propagazione* (Rend. della R. Acc. dei Lincei; seduta del 19 maggio 1912).

ingrandimento di 60 volte, e smorzamento di 4 a 1. Le ore che si leggono sul sismogramma sono espresse in t. m. Gr.: la 1ª ($_i$P) rappresenta l'inizio ben netto della registrazione. la 2ª (S) indica, a giudizio di quel Direttore, il primo apparire dei secondi tremiti preliminari, i quali avrebbero dunque



viaggiato con una velocità di soli m. 4360 c. al secondo. Tale cifra si ottiene, infatti, dividendo la distanza di m. 1.540.000 di Granata da Avezzano per l'intervallo di 350 secondi, che si ottiene sottraendo l'ora al presunto epicentro da quella di detto Osservatorio.

Chimica. — *Ricerche sulle combinazioni subalogenate di alcuni elementi*: III. *Sul cosidetto sottocloruro di bismuto*. Nota di L. Marino e R. Becarelli, presentata dal Socio R. Nasini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il sistema « nitroglicerina - cotone nitrato ». Condensazione dei vapori di nitroglicerina sul cotone nitrato in un ambiente vuoto a temperatura uniforme.* Nota I di D. Chiaraviglio e O. M. Corbino, presentata dal Socio E. Paternò.

È noto che la gelatinizzazione del cotone nitrato, che ha così grande importanza nella fabbricazione dei moderni esplosivi di propulsione, è generalmente ottenuta o per mezzo di un solvente volatile non esplosivo, che viene nell'ultima fase di fabbricazione della polvere eliminato da questa in modo opportuno così da non restarne che traccie nel prodotto finito; oppure per mezzo di altre sostanze, quasi sempre esplosive, pochissimo volatili, che nel prodotto finito restano come costituenti essenziali. Fra queste sostanze la nitroglicerina ha speciale interesse, perchè ad essa il più spesso si ricorre per ottenere con il cotone nitrato esplosivi tanto di propulsione come la balistite, quanto di rottura, come la gelatina esplosiva.

Il complesso delle proprietà fisiche di tali miscugli di nitroglicerina e di cotone nitrato conferisce ad essi il carattere generico dei colloidi; ma quando si è detto ciò, siamo ben lungi dal conoscere l'intima struttura della sostanza, le vere condizioni in cui si trovano associati il cotone nitrato e la nitroglicerina, e il grado di omogeneità o di dispersione del sistema che già a un semplice esame microscopico, con ingrandimenti anche non eccessivi, apparisce di costituzione assai complessa (1).

Non sarà inutile il notare che il problema in questione, già importante in sè ai fini della generale conoscenza dei corpi colloidi, ha un interesse speciale e grandissimo nel caso delle sostanze esplosive, poichè ogni superficie di discontinuità nella costituzione di un esplosivo può divenire il posto di accumulo dei prodotti di lenta decomposizione, e perciò la struttura fisica del colloide deve notevolmente influire sulla stabilità dell'esplosivo.

Qualunque ricerca destinata a illustrare la proprietà del sistema binario « cotone nitrato - nitroglicerina », per quanto ne siano modesti i risultati, va perciò considerata come un contributo di interesse non trascurabile sia dal punto di vista scientifico sia da quello tecnico; questo convincimento ci ha indotti a render noti i risultati seguenti, frutto di una lunga serie di esperienze da noi eseguite nel Laboratorio Chimico per lo studio delle sostanze esplosive. Esse sono caratterizzate dal fatto che abbiamo potuto operare a temperature ordinarie, utilizzando i vuoti elevatissimi che le attuali

(1) E. Paternò e F. Traetta-Mosca, Gazzetta Chimica, t. 38_2. pag. 512, 1908.

macchine pneumatiche permettono di ottenere, e che ci è stato possibile seguire la migrazione dei vapori di nitroglicerina dal liquido al cotone nitrato, e dalla balistite a una parete fredda, non ostante che la pressione di quei vapori sia estremamente piccola, come abbiamo dimostrato in due precedenti lavori.

1. — *Condensazione dei vapori di nitroglicerina sul cotone nitrato in un ambiente vuoto a temperatura uniforme.*

Abbiamo descritto, in una Nota anteriore (1), un apparecchio costruito al fine di permettere la distillazione nel vuoto della nitroglicerina, contenuta in un piccolo bicchiere sospeso nel centro di un grande pallone.

Un apparecchio analogo fu adoperato per ricercare se, e in quale misura, i vapori che si sprigionano dal bicchiere centrale vanno a depositarsi in una massa polverulenta di cotone nitrato deposto al fondo del pallone. L'unica causa di migrazione del vapore doveva essere la sua tendenza ad essere assorbito dal cotone nitrato; fu quindi evitata con ogni cura ogni possibilità di differenze di temperatura fra la nitroglicerina e il cotone nitrato. A tal fine, il pallone, rilegato, nel modo già descritto, a una pompa Gaede a mercurio e a un provino di Mac-Leod, venne introdotto in un grande termostato ad aria, nel quale si poteva, per mezzo di una corrente elettrica opportunamente graduata, mantenere una temperatura uniforme e regolarla a volontà fino a circa 50°.

Dentro il pallone eran disposti due termometri al decimo di grado, immersi nella nitroglicerina del bicchiere e nel cotone nitrato; si potevano così conoscere le temperatura dei due corpi e assicurarsi della loro identità.

L'operazione poteva esser proseguita senza interruzioni per molti giorni, mentre una serie di finestre praticate nel termostato, e provviste di vetri, permetteva di guardare con un canocchiale nell'interno del pallone, di seguire il progressivo abbassamento di livello della nitroglicerina nel serbatoio e di sorvegliare l'andamento dei termometri.

Di regola il pallone, dopo fatto il vuoto, veniva escluso dal resto della tubulatura di rarefazione con la manovra di un rubinetto. Un lungo funzionamento della pompa era necessario, all'inizio, prima che si raggiungesse stabilmente una rarefazione elevata; e ciò a causa della grande quantità di aria aderente alle fibre di cotone nitrato finamente polpate. Anche in seguito fu sempre seguìto al Mac-Leod l'andamento della pressione, facendo agire di tempo in tempo la pompa per riportare la pressione al punto voluto.

In queste condizioni, e mantenendo fin da principio una temperatura di circa 30° nel pallone, si potè constatare una rilevante migrazione dei

(1) D. Chiaraviglio e O. M. Corbino, Rend. Lincei, t. 23, 1° sem., pag. 37, 1914.

vapori verso il cotone, e perciò un progressivo abbassamento del livello della nitroglicerina nel suo serbatoio. A poco a poco la distillazione si andò facendo più lenta, fino a rendersi, dopo alquanti giorni appena sensibile.

Un esame chimico del cotone nitrato, alla fine dell'esperienza, rivelò che esso aveva assorbito uniformemente in tutta la massa la nitroglicerina sparita dal serbatoio, pur mostrando un aspetto poco diverso dal primitivo; solo si notava in esso una struttura più attaccaticcia. Schiacciando la polvere sotto una rilevante pressione, per mezzo di una pressa, le fibre si rapprendevano in un insieme apparentemente omogeneo, colore di cuoio, traslucido, molto simile all'ordinaria balistite, e che manifestava cioè i caratteri di una gelatinizzazione.

Il contenuto in nitroglicerina corrispondeva, com'è naturale, al liquido sparito nel bicchiere centrale; e dipendeva solo dalla temperatura di equilibrio, purchè si fosse aspettato un sufficiente tempo a raggiungerlo. Così con cotone collodio contenente il 12,25 % di azoto, e mantenuto per 7 giorni in presenza dei vapori di nitroglicerina alla temperatura comune di 30°, si ottenne una galletta impregnata al 31,5 % di nitroglicerina; ma prolungando in altre esperienze il tempo col contatto dei vapori, in 40 giorni si raggiunse il contenuto del 35,6 %. Ricorrendo invece a fulmicotone, che conteneva il 13,27 % di azoto, si pervenne a fissarvi, dopo 40 giorni, il 37,4 % di nitroglicerina.

L'esame microscopico delle fibre di cotone nitrato prima e dopo l'assorbimento dei vapori di nitroglicerina non ha dato finora risultati sicuramente interpretabili, e noi ci riserbiamo perciò di approfondire in seguito l'importante questione.

Resta intanto assodato che effettivamente il cotone nitrato provoca un abbassamento nella tensione di vapore della nitroglicerina, e perciò una migrazione del liquido, pur trovandosi alla stessa temperatura di questo.

Evidentemente, questo risultato non conduce necessariamente ad ammettere che fra il cotone nitrato e la nitroglicerina tenda a formarsi una vera soluzione, che cioè il meccanismo della distillazione sia identico a quello per cui l'acqua distilla, a pari temperatura, verso un sale che in soluzione determina un abbassamento della pressione di vapore.

Come è noto, un abbassamento nella tensione di vapore può anche prodursi per la presenza di un solido capace di dare col liquido fenomeni di semplice imbibizione. Ed è ben probabile che un processo analogo abbia luogo tra i vapori di nitroglicerina e le fibre di cotone nitrato, così come un batuffolo di cotone idrofilo assorbe acqua in un'atmosfera umida.

L'analogia è completata dal fatto che abbiamo potuto osservare una migrazione della nitroglicerina verso il cotone nitrato anche se questo ha perduto la struttura fibrosa, come avviene nel residuo della balistite da cui si sia estratta con etere la nitroglicerina. Il cotone nitrato, così ottenuto,

era ancora capace di assorbire i vapori per circa l'8 % del suo peso; ora, com'è noto, un fenomeno analogo si manifesta fra l'acqua e la cellulosa che abbia perduto lo stato fibroso.

Non sarà poi inutile il riferire l'esito di un'altra esperienza da noi eseguita, la quale, mentre conferma l'analogia col caso del cotone coll'acqua, permette di escludere che la tendenza del cotone nitrato ad assorbire i vapori di nitroglicerina sia analoga a quella che determina la igroscopicità di alcuni sali e l'abbassamento della tensione di vapore delle soluzioni.

Abbiamo infatti osservato che, lasciando cadere nel vuoto una certa quantità di nitroglicerina sul cotone nitrato, si manifesta un ben netto sviluppo di calore, capace di elevare sensibilmente la temperatura della massa. Il cotone nitrato era stato tenuto per molto tempo nel vuoto assai spinto della pompa Gaede per eliminare i fenomeni perturbatori dovuti all'atmosfera d'aria che aderisce fortemente alle fibre.

Per mezzo di un apparecchio in vetro alquanto complicato, che permetteva di evitare la manovra di rubinetti nel tragitto del liquido esplosivo, si potè al momento voluto far cadere in seno alla massa di cotone, con velocità regolabile, una certa quantità di nitroglicerina la cui temperatura era sensibilmente eguale a quella del cotone nitrato e la cui quantità era molto minore di quella occorrente per imberlo tutto; un termometro sensibile al decimo di grado, immerso nella polvere, permetteva di constatare le variazioni di temperatura prodotte dal contatto col liquido. Fu così riconosciuto un elevamento di temperatura che raggiunse, in una esperienza, circa tre gradi.

Questo risultato prova certamente che non siamo in presenza di un processo semplice di dissoluzione del solido nel liquido, cui dovrebbe invece corrispondere un abbassamento di temperatura.

Non resta quindi che o ammettere la produzione di una vera reazione chimica esotermica tra il cotone nitrato e la nitroglicerina, o tutti i fatti osservati attribuire a fenomeni di pura imbibizione.

Chimica. — *Sui borati. Sistema* Na^2O, B^2O^3, H^2O a 60°. Nota I di U. Sborgi e F. Mecacci, presentata dal Socio R. Nasini.

Chimica. — *Sui borati. Sistema* $(NH^4)^2O, B^2O^3, H^2O$ a 60°. Nota di U. Sborgi e F. Mecacci, presentata dal Socio R. Nasini.

Biologia. — *Una ipotesi biologica sulla deposizione dello zolfo durante l'epoca gessoso-solfifera.* Nota del prof. G. Bargagli-Petrucci, presentata dal Corrispondente P. Baccarini.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Ricerche mineralogiche e petrografiche sulla valle del Chisone (Alpi Cozie): sopra un'interessante varietà di gneiss di Prali* (1). Nota di Emanuele Grill, presentata dal Corrispondente Federico Millosevich.

Da alcuni anni mi occupo della mineralogia e geologia di quella porzione delle Alpi Cozie comprendente la valle del Chisone, la quale, come pure l'adiacente valle del Pellice, è stata, a differenza di molte altre valli alpine, fin'ora, assai poco studiata dai mineralisti. Infatti, se si prescinde dai magistrali lavori dell'ing. V. Novarese (2), compiuti in seguito al rilevamento geologico della regione, è veramente esiguo il numero delle pubblicazioni di indole mineralogico-petrografico riguardanti quella zona (3). Questo fatto, come ancora il mio abituale e lungo soggiorno estivo in quei luoghi, mi ha determinato ad occuparmene profondamente.

Nell'attesa di poter dare alle stampe lo studio complessivo di tutte le più importanti formazioni litologiche di quell'interessante territorio, non appena ne sarà ultimato l'esame chimico e petrografico, espongo, in questa Nota preliminare, il risultato delle mie ricerche intorno alla vera natura di una roccia, intercalata nell'importante gruppo dei micascisti, e dall'ingegner Novarese (4) considerata come una quarzite.

Secondo l'ing. Novarese, la quarzite, in forma di banchi, si presenterebbe nel vallone di Prali (parte alta e meridionale della Germanasca, affluente del Chisone) in due località: « sulla cresta che scende all'ovest « della punta Cornour (5), e sul monticello di fronte a Prali, dove un banco

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto mineralogico di Firenze, diretto dal prof. Federico Millosevich.

(2) V. Novarese, *Sul rilevamento geologico eseguito nel 1894 in Valle della Germanasca (Alpi Cozie)*, Bull. R. Com. geol., pag. 253, an. 1895, Roma; *I giacimenti di grafite delle Alpi Cozie*, Bull. R. Com. geol., pag. 4, an. 1898, Roma.

(3) S. Franchi e V. Novarese, *Appunti geologici e petrografici sui dintorni di Pinerolo*, Bull. R. Com. geol., pag. 385, an. 1895, Roma; L. Colomba, *Note mineralogiche sulla valle del Chisone* (cave del Pomaretto), Atti R. Acc. sc., Torino, vol. XLIII, 1908; C. Barucco, *Le cave di talco nella valle di S. Martino (Alpi Pinerolesi)*, Rassegna mineraria metall. chimica, vol. XXXII, n. 12, Torino, an. 1910,

(4) V. Novarese, *Sul rilevamento geologico* ecc., pag. 264.

(5) *Nota*. Nonostante l'indicazione, un po' vaga, della località, sono certo di averne identificato esattamente l'ubicazione, sia perchè non si hanno altre creste ad ovest della punta Cornour, e sia anche perchè il rilevatore non ha indicato l'esistenza del banco di calcare da me segnalato, mentre sono invece esattamente ricordate tutte le altre formazioni calcaree circostanti.

« di una diecina di metri di potenza di una quarzite bianca, simula l'a-« spetto che hanno nélla valle gli affioramenti di calcare cristallino ».

Il banco della prima località, cui accenna Novarese, attraverserebbe la scoscesa e poco accessibile parete del Cornourin, cioè della vetta che s'innalza esattamente a sud dei ricoveri militari dei Tredici Laghi e quindi anche all'ovest del Cornour (vedi foglio 67 della carta d'Italia, *Perosa-Argentina*, scala 1 a 50000). Dal colle del Cornourin, tra la punta omonima e il Cornour, detto banco scende obliquamente in basso, con direzione all'incirca SO-NE, mantenendosi però sempre ad un'altezza difficilmente accessibile. Per prelevarne un campione in posto, è necessario di arrampicarsi per il ripido canalone che dalla conca dei Tredici Laghi conduce al suddetto colle, ove, un po' prima di giungere sulla cresta, s'incontra la roccia bianca in questione, la quale non è una quarzite ma bensì un calcare bianco, cristallino, di cui avrò ad occuparmi in un altro lavoro.

Il secondo banco di presupposta quarzite si osserva vicino alla frazione Villa di Prali, in regione Galmont, e più precisamente alle Ronciaglie, ove esso attraversa, per un lungo tratto, la testata dell'ultima propaggine di monte che divide il vallone di Rodoretto da quello di Prali.

È racchiuso anch'esso, come il precedente, fra strati di micascisto di cui segue, in perfetta concordanza, l'andamento, immergendosi con essi verso il monte con una pendenza di 62° circa e con direzione NNE-SSO.

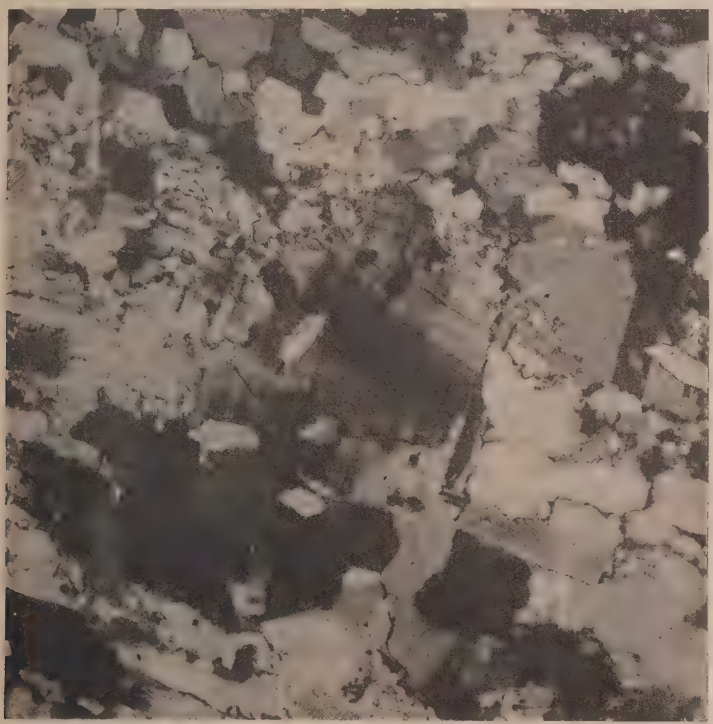
La roccia costituente il banco è bianchissima, compatta, e con una fronte quasi verticale che sopravanza alquanto il micascisto includente, assai meno resistente. Nella sua massa si notano delle linee di frattura con direzione variabile, le quali ne sminuiscono però ben poco la compattezza e la tenacità. Alla parte superiore si ha un netto distacco rispetto al micascisto, il cui color grigio-plumbeo ne fa risaltare anche maggiormente la separazione. Non si ha così un manifesto e graduale passaggio tra l'uno e l'altro tipo di roccia. Tuttavia in prossimità della zona di contatto si osserva, così nel micascisto come nella roccia inclusa, un leggero aumento degli elementi micacei.

Non è possibile, a prima giunta, di riconoscere sicuramente la natura di quella intercalazione dei micascisti, la cui colorazione bianchissima, che la rende appariscente anche da lontano, e la grana regolare e tanto minuta da non lasciar distinguere, ad occhio nudo, altro costituente essenziale all'infuori del quarzo e della mica, le dànno addirittura l'aspetto di una quarzite micacea.

La mica è tutta bianca, assai abbondante e in numerose laminette, lucenti, molto piccole (la dimensione lineare massima è di rado superiore ai 2 mm.), distribuite nella massa della roccia in modo regolare e con una disposizione varia. Esaminando però attentamente le diverse superficie di frattura dei campioni staccati, si nota un certo parallelismo tra le lami-

nette di mica e gli strati del micascisto includente, senza che la roccia inclusa assumi però una vera scistosità.

Al microscopio, la roccia presenta la struttura caratteristica delle rocce cristalline metamorfiche, cioè quarzo cataclastico e pavimentato. La pavimentazione del quarzo viene interrotta da adunamenti di mica e di feldspato, i quali, invece di seguire piani costanti di scistosità, accennano ad aggrupparsi in zone irregolari, ciò che giustifica la frattura scagliosa.



Rispetto all'abbondanza relativa dei tre principali costituenti, il primo posto è tenuto dal quarzo. Questo passa da frammenti estremamente minuti a frammenti che non oltrepassano, per altro, le dimensioni proprie agli gneiss minuti. Il secondo posto è occupato dal felspato, che, nel campo del microscopio, occupa le maggiori aree come microclino, il quale, in grosse plaghe (Vedi figura. Ingrandimento 35 diam., nicols incrociati) prende parte al mosaico cristallino. Poi viene la mica, anch'essa assai abbondante.

Il *quarzo* è abbastanza limpido, a contorni molto irregolari e allotriomorfo rispetto agli elementi del felspato e della mica. Presenta frequentissime fenditure, che, assieme con l'estinzione ondulata, abbastanza notevole, sarebbe una prova del dinamometamorfismo cui è stata soggetta la nostra roccia.

Non mancano le inclusioni di mica e di qualche altro granulo che per i suoi colori di polarizzazione sembra doversi attribuire al pirosseno.

Il *felspato* è rappresentato, nella quasi totalità, da plaghe, relativamente assai grandi, di *microclino*, riconoscibile per la caratteristica struttura a graticcio, dovuta alla germinazione polisintetica albite-periclino e per gli indici di rifrazione sempre inferiori ai due principali del quarzo e a quello del nuovo mastice adoprato da Voigt e Hochgesang, la collolite con $N_{na} = 1{,}5354$.

Questo felspato è assai fresco e sembra derivato, anche qui, come in molti altri gneiss alpini, da ortoclasio, ancora presente, in seguito ad energiche deformazioni meccaniche. Esso non mostra tracce di accrescimento pertitico; le sue uniche inclusioni sono quelle di minute squamette a forte poter rifrangente e ad elevata birifrazione, riferibili a mica muscovite.

In talune zone di microclino, vicine alla discontinuità della roccia, si nota una estinzione raggiata, che attesterebbe una incipiente zeolitizzazione, ossia una alterazione per idratazione.

Qua e là compaiono pure lamelle di *plagioclasio*, il quale, in confronto dello sviluppo, veramente notevole, del microclino, assume una parte quasi accessoria.

A cagione dei contatti mal definiti tra plagioclasio e quarzo, non si possono fare sicure misure comparative tra gli indici di rifrazione di quei due minerali, secondo il metodo di Becke. Quindi la determinazione del felspato sodico-calcico, geminato sempre secondo la legge dell'albite, venne fatta, nelle sezioni normali a $\{010\}$, solo in base al valore dell'estinzione simmetrica, trovato compreso fra 8° e 13°. I confronti con la collolite dànno i seguenti schemi:

$$\alpha' > n \qquad \gamma' > n;$$

si tratterebbe dunque di un plagioclasio assai acido, compreso fra l'oligoclasio basico e l'andesina, corrispondente cioè ad una miscela isomorfa intermedia a $Ab_2\,An_1$ e $Ab_3\,An_2$.

L'*ortoclosio* vi è parimenti scarso. È abbastanza fresco e limpido. Si presenta in larghe plaghe con evidenti linee di sfaldatura basale e in elementi allungati, geminati secondo la legge di Carlsbad. Il confronto con la collolite dà:

$$\alpha' < n \qquad \gamma' < n.$$

La *mica* che prende parte alla costituzione della roccia è da riferirsi completamente alla muscovite. Essa è in lamelle pochissimo sviluppate, con marcate linee di sfaldatura secondo le quali avviene l'estinzione, e assume colori d'interferenza vivaci e iridati tra i nicols incrociati.

I suoi contorni sono più regolari e meno sfrangiati di quelli di tutti gli altri elementi: ciò che, come anche il ritrovarsi inclusa nel quarzo e nel felspato, attesterebbe la precedenza genetica di questo minerale sugli altri.

La muscovite è pure essa abbastanza fresca, e solo di rado accenna ad alterazione in clorite.

Minerali accessorii. Se si eccettua la rara comparsa, nel quarzo e nel felspato, di granuli assai rifrangenti, quasi incolori e con pleocroismo poco sensibile, probabilmente dovuti a pirosseno, si può dire che la roccia qui studiata è assai povera di interclusi. Infatti, in tutta la sezione vidi un solo cristallo di granato non molto esteso, torbido, e fortemente fratturato.

L'analisi chimica mi ha dato i seguenti risultati:

p. p. arr. . . .	1,12
SiO_2	73.23
Al_2O_3	17,19
Fe_2O_3	0,42
CaO	1.37
MgO	tr.
K_2O	4,50
Na_2O	3,01
	100.84

p. sp. 2,677

Dalla diagnosi microscopica e chimica risulta quindi, in modo sicuro, che la roccia di cui ci occupiamo non è una quarzite di cui ha solo tutta l'apparenza, per la colorazione bianchissima, dovuta alla mancanza pressochè assoluta di elementi colorati, non mai visibili macroscopicamente, e per la grana minutissima.

E data poi la notevole abbondanza della mica e del felspato alcalino, il quale prende parte essenziale alla costituzione della roccia, tanto che in certe plaghe è addirittura prevalente sul quarzo e sulla mica, elementi normali degli scisti cristallini, credo non si debba neppure riferire ad uno gneiss quarzitico ma considerare come un vero e proprio gneiss con struttura speciale.

Volendo quindi dare a questa varietà locale di gneiss un nome che ne indichi la struttura e la composizione mineralogica ad un tempo, bisogna chiamarla *gneiss minuto muscovitico a microclino.*

Sulla diffusione di questo gneiss, e sull'estensione e importanza delle formazioni quarzitiche nella valle del Chisone, tratteremo più particolarmente nella descrizione generale delle formazioni litologiche della regione.

Biologia vegetale. — *Sulla biologia fiorale del mandorlo.* Nota preventiva di C. Campbell, presentata dal Socio R. Pirotta.

La conformazione del fiore nelle diverse piante e varietà, presenta differenze tali, su cui è bene fissare l'attenzione, per l'interesse che esse offrono sia dal lato botanico come da quello agrario, in quanto possono portare alla spiegazione delle cause di bassa produttività in date annate, in mandorleti specializzati con unica varietà o forma biologica, e individualmente per certe piante, specie quando, anzichè associate in vaste colture, si trovino isolate, e vengano a mancare o difettare nella località i pronubi necessarî alla impollinazione.

Sul dimorfismo fiorale del mandorlo, non si hanno che scarse malsicure e contraddittorie notizie, riguardanti esclusivamente le diversità che passano tra mandorlo dolce e mandorlo amaro, distinzione che verrebbe a cadere se il mandorlo dolce si ritiene, come è forse più logico di ritenere, una forma coltivata derivata dal mandorlo amaro, con tutte quelle modificazioni morfologiche, chimiche e adattamenti biologici, che sono così comuni tra le piante coltivate.

De Candolle [1] così ne scrive:

« α amara — Stylis fere longitudine staminum infra tomentosis;
β dulcis — ..... stylis stamina multo superantibus ».

Identica distinzione si trova p. es. nel Loudon [2]:

« amara — Styles nearly as long as the stames, and tomentose in the lower part;
dulcis — Styles much longer than the stames ».

Scotti [3], tra l'altro, fa riconoscere i caratteri del mandorlo amaro per lo stile un po' più corto. Egualmente ne parlano gli autori — anche agrarî — che si sono occupati del mandorlo, e così in una recente pubblicazione si esprimono Marre e Toulouse [4].

« Le pistil des variétés amères est de même longueur que les étamines, ce qui facilite la fécondation; le pollen tombe naturellement des anthères sur le stigmate, et assure la fécondation. Le style des variétés douces, au con-

(1) De Candolle, *Prodromus systematis naturalis regni vegetabilis*. Parisiis 1824-1844.
(2) I. C. Loudon, *Tree and shrub*. London 1842.
(3) G. Scotti, *Flora medica* 1872.
(4) E. Marre et A. C. Toulouse, *L'amandier*. Paris 1913.

traire, est beaucoup plus long que les étamines; le pollen ne peut aller de lui-même sur les stigmates ».

Nel Fiori (1) viene invece fatta una distinzione decisamente opposta:

« seme ora (a - *dulcis* [Mill, sub amygdalo]) dolce in pianta a stilo lungo come gli stami esterni, ora (b - *amara* [Hayne, sub amygdalo]) amaro in pianta a stilo più lungo degli stami esterni ».

Da tali esempii di citazioni risulta evidente come la questione non sia stata approfondita, sia nei riguardi della distinzione tra mandorlo amaro e mandorlo dolce, sia nei riguardi della biologia fiorale, e come principalmente due sole forme sieno state notate, la mediostila e la longistila, nessun cenno trovandosi di una forma decisamente brevistila come risulta dalle mie ricerche.

***

Nel mandorlo, le gemme fiorali si trovano sui rametti fruttiferi isolate e meno frequentemente abbinate o raggruppate alla estremità dei rametti fruttiferi.

I caratteri del fiore all'antesi, o anche prima, sono sensibilmente varii da pianta a pianta, quando provenga da seme, e da varietà a varietà, così per struttura come per dimensioni.

Le presenti ricerche furono fatte sopra piante, sia direttamente provenienti da seme, sia innestate.

Il calice, coi sepali più o meno fortemente pubescenti, ha colorito variabilissimo, che va dal colore nocciola-rossastro al verde chiaro, con variazioni più o meno accentuate in fiori di determinata varietà o pianta.

Nè minori sono le variazioni che si riscontrano nelle dimensioni e colorito dei petali, che vanno dal bianco più perfetto, al bianco con sfumature o striature rosee, ad un rosso più o meno intenso.

Sembra che non vi sia relazione tra le dimensioni e il colorito dei sepali e petali, la qualità del frutto e le diverse caratteristiche degli organi della riproduzione, che presentano le differenze strutturali della maggiore importanza e del maggiore interesse, sia dal lato morfologico, sia da quello biologico.

Generalmente, in un medesimo fiore gli stami sono di varia lunghezza, e quindi le antère non vengono a trovarsi sopra un medesimo piano; la loro deiscenza, se non avviene contemporaneamente, avviene quasi sempre in un periodo molto breve di tempo.

Il maggiore interesse viene offerto dal pistillo, per la sua posizione rispetto agli stami, così che le diverse forme fiorali debbono dividersi come segue:

fiore longistilo
» *mediostilo*
» *brevistilo.*

(1) Fiori, *Flora analitica d'Italia*. Padova 1896-98, vol. I.

A queste tre distinte formazioni ne va forse aggiunta una quarta, che ho trovata però in un'unica pianta, ma in tutti i fiori della stessa:

fiore a stilo ricurvo

Fiore longistilo - È il fiore in cui lo stilo supera di circa metà della

sua lunghezza gli stami, e viene quindi a trovarsi isolato sopra di essi, ancora prima che avvenga la perfetta schiusura; fig. 1, e 1 *bis*.

Sembra che la forma longistila sia propria delle varietà più gentili coltivate, e la si trova di preferenza nelle piante innestate, per quanto la abbia riscontrata anche in piante direttamente provenienti da seme.

Fiore mediostilo - In tale forma lo stilo ha una lunghezza presso a poco eguale agli stami più lunghi, e quindi lo stimma viene a trovarsi all'altezza delle antère più elevate. Tale forma ho trovata in piante coltivate ma provenienti da seme direttamente e non innestate; fig. 4.

Fiore brevistilo - In esso lo stilo non arriva se non raramente all'altezza degli stami più corti, e lo stimma viene quindi a trovarsi in posizione inferiore alle antère anche degli stami più corti; fig. 3 e 3 *bis*.

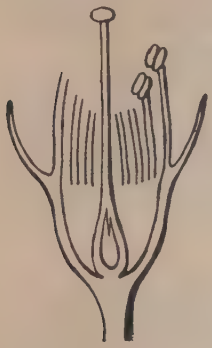


Fig. 1 *bis*. — Longistilo.

Fig. 2 *bis*. — A stilo ricurvo.

Fig. 3 *bis*. — Brevistilo.

Fig. 5.

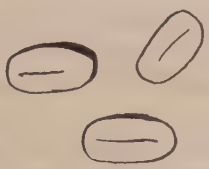


Fig. 6.

Tale forma ho trovata in piante provenienti da seme non innestate, o, quanto meno, in piante innestate non mi fu dato rinvenirla, senza escludere che anche tra piante innestate possa rinvenirsi.

Fiore a stilo curvo - In una coltivazione di piante non innestate, ne ho rinvenuta una in cui tutti i fiori portavano lo stilo ricurvo (fig. 2 e III); e, in qualche fiore, qualche stame presentava lo stesso carattere. Lo stimma, in tali fiori, viene quindi a trovarsi completamente rivolto in basso.

Notevole ancora in tali fiori la costante presenza di due ovoli nell'ovario; mentre negli altri fiori, diversamente costituiti, dei due sacchi embrionali che si sviluppano ordinariamente da principio, uno solo arriva a maturarsi, così che osservato il fiore completamente sviluppato, si trova nell'ovario un solo ovolo, e raramente due.

È questa una forma nuova, che va studiata e ricercata altrove, per stabilirne la genesi e l'importanza biologica.

Le ricerche sul polline e sulla sua germinabilità, posto in soluzione di saccarosio al 10 % in goccia pendente, mostrano caratteristiche anche di grande interesse.

Il polline non germina sempre con lo stesso tempo, e talora non germina affatto. Nelle ricerche sui fiori longistili, e di una pianta più specialmente, il polline ha mostrato un alto potere germinante, con l'emissione del tubo pollinico in breve tempo: due ore circa a temperatura di laboratorio ed in soluzione di saccarosio al 10 % in goccia pendente.

Nelle diverse forme fiorali si ha sempre l'emissione del tubo pollinico, ma con variazioni sia nella percentuale di germinazione, sia nel tempo impiegato; il che potrebbe anche essere in relazione ad altre cause, tra cui l'età del polline, così da far ritenere che una relazione tra potere germinante del polline e forma fiorale non vi sia, per lo meno nelle forme e fiori da me indicati e studiati.

Una relazione sembra invece esista tra la forma del polline e la sua germinabilità. Esaminato al microscopio, il granulo pollinico mostra una forma che va dalla rotonda più o meno regolare (fig. 5), alla elittica, con un solco mediano (fig. 6), che deve essere una ripiegatura dell'esina. Le due figg. 5 e 6 rappresentano le due forme di polline ad un ingrandimento di circa 300 diam. disegnate con la camera lucida di Abbe.

In fiori mediostili (di unica pianta) ben differenziati ancora pel colorito bianco-puro dei petali e verde-chiaro dei sepali, polline di cui alla fig. 6, non è germinato nella soluzione di saccarosio al 10 %, nè nella stessa allungata con acqua. Il granulo pollinico, in tali condizioni, ingrossava, per assumere la forma primitiva all'asciutto, senza mai emettere il tubo pollinico. Granuli di presso a poco la stessa forma, ma tolti da altri fiori, e di altra forma, e di altre piante, hanno dato una bassissima percentuale di germinazione, in confronto a quelli, rotondi, d'altri fiori e d'altre piante.

Può darsi che tale polline esiga condizioni diverse per germinare, sia di luce sia di mezzo nutritivo; in ogni caso riesce evidente la stretta relazione tra forma e germinabilità del polline, relazione che ha bisogno di più larghe indagini sperimentali.

La germinabilità del polline dei fiori a stilo ricurvo non ha mostrato nulla di caratteristico.

***

Dalle cennate ricerche ed osservazioni, non è certo logico di trarre conclusioni definitive, in quanto nuovo e più esteso lavoro, fatto in condizioni che permettano una accurata sperimentazione (in aperta campagna le esperienze sono difficili e mal sicure, perchè chi può garentirle da mani

profane?), chiarirà non pochi dubbî che sorgono naturali e non poche ipotesi non meno logiche ed importanti.

Qualche pratica osservazione può però sino da ora chiarire il complicato meccanismo della fecondazione del fiore del mandorlo, quando si consideri che piante isolate non producono affatto, o molto poco e raramente, e che bassa produzione presentano spesso mandorleti innestati con piante biologicamente simili, mentre la maggiore e più costante produzione sembra aversi là dove sieno raggruppate le tre forme fiorali longistila mediostila brevistila.

Tale constatazione fa subito pensare all'oscuro fenomeno dell'andinamandria, secondo cui, in fiori monoclini, il polline, ancorchè ottimo, è incapace di fecondare lo stimma del proprio fiore — e probabilmente della stessa forma biologica — mentre lo stesso polline può fecondare il fiore proveniente da diversa individualità fisiologica, e probabilmente diversa conformazione.

Nel caso in parola, si avrebbe quella forma di andinamandria che il Delpno chiama triplostaurogamia.

Resterebbe da delucidare il posto biologico da assegnare al fiore a stilo ricurvo, se pure non trattisi di una forma puramente anomala, non stabile o atavica, in quanto non sono noti — ch'io sappia — casi di fiori, nelle diverse specie del genere ed affini, che portino stilo ricurvo.

Simili considerazioni farebbero ancora cadere la distinzione tra mandorlo amaro e mandorlo dolce, come varietà a sè o come mutazione colturale, nei riguardi dei caratteri fiorali; ma le diverse forme dovrebbero considerarsi come un naturale nesso biologico, all'infuori delle esterne condizioni e della azione colturale.

Dal complesso esame della questione, e di ricerche per quanto preventive, risalta evidente — parmi — la necessità, anche per la pratica agraria, che simili ricerche vengano completate ed estese, perchè l'assodare sicuramente la biologia fiorale di una pianta coltivata, vuol dire contribuire ad una più certa e regolare produzione, affidata ancora al caso e, più, all'empirismo.

Fisiologia vegetale. — *Il magnesio nelle piante albicate e clorotiche* (1). Nota della dott^ssa. Eva Mameli, presentata dal Socio Giovanni Briosi.

In una precedente Nota (2) dimostrai sperimentalmente che la quantità di clorofilla che si forma negli organi assimilatori epigei è in rapporto con la quantità di magnesio somministrata alla pianta. Infatti:

1°) piante diversissime, tanto crittogame quanto fanerogame, appartenenti a diverse specie (*Protococcus viridis*, *Spirogyra majuscula*, *Vaucheria* sp., *Zea Mays*, *Polygonum Fagopyrum*, *Helianthus annuus*, *Torrenia Fournieri*), coltivate in soluzioni prive di magnesio, diedero tallo e foglie completamente eziolate o appena debolmente verdi;

2°) le stesse specie, coltivate in soluzioni contenenti quantità varie di magnesio, svilupparono tallo e foglie la cui intensità di colorazione cresceva col crescere della quantità di magnesio che era stata loro somministrata.

Gli estratti eterei di queste foglie, confrontati con il metodo colorimetrico, dimostrarono che tra clorofilla e magnesio v'è un rapporto *diretto* costante.

Le presenti ricerche mirano a portare un nuovo contributo alla dimostrazione dell'esistenza di questo rapporto, per mezzo del dosaggio quantitativo del magnesio contenuto nelle foglie (o in parti di foglie) verdi ed in foglie (o parti di foglie) bianche o giallognole, appartenenti ad una stessa pianta variegata o clorotica.

Le analisi chimiche, sinora fatte dai diversi autori allo scopo di conoscere le quantità di ceneri, di sostanza organica, di acqua e dei diversi elementi, contenuti sia nelle foglie verdi sia nelle corrispondenti albicate o clorotiche, sono scarse ed i risultati contradditorii, tanto che lo Czapek scrive, per ciò che riguarda il magnesio, nella sua *Biochemie der Pflanze* (II, 796): « che il contenuto, in magnesio, delle foglie eziolate, si differenzi in modo speciale e costante da quello delle foglie verdi, non è finora risultato dalle analisi delle ceneri ».

Tale mancanza di un risultato conclusivo, che compendii tutte le ricerche fatte, è dovuto soprattutto alla disparità del materiale d'analisi usato dai diversi autori, i quali analizzarono, ora foglie *normalmente* albicate,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto botanico della R. Università di Pavia, gennaio, 1915.

(2) Mameli E., *Sulla influenza del magnesio sopra la formazione della clorofilla* (Atti Ist. bot. di Pavia, XV, 151), an. 1912.

appartenenti cioè a piante nelle quali l'albinismo era da molto tempo fissato quale carattere ereditario; ora foglie eziolate per clorosi patologica d'origine recente; ora foglie eziolate perchè provenienti da culture fatte in ambienti privi di luce; ora infine foglie ingiallite, còlte nella stagione invernale.

È evidente che le condizioni fisiologiche generali delle foglie non colorate (o debolmente colorate), in confronto a quelle verdi, debbano essere assai varie a seconda che si tratti di uno o dell'altro di questi quattro casi, e che specialissime poi debbano essere in ciascun caso le condizioni nelle quali avvengono l'assorbimento delle sostanze minerali e il loro accumularsi.

Esaminiamoli partitamente.

Albinismo. — Le prime analisi comparative di foglie verdi e di foglie variegate di bianco e di verde, si debbono al Church (1). Egli analizzò foglie di *Acer Negundo*, di *Hedera Helix*, e di *Ilex Aquifolium*; e trovò le seguenti percentuali dei componenti le ceneri:

	Acer		Hedera		Ilex	
	f. bianche	f. verdi	f. bianche	f. verdi	f. bianche	f. verdi
Potassio	45,05	12,61	35,30	16,22	47,20	17,91
Calcio	10,89	39,93	21,50	34,43	12,92	48,55
Magnesio	3,95	4,75	3,23	2,43	1,11	1,04
Ferro	?	?	3,11	3,11	2,62	2,31
Fosforo	14,57	8,80	9,51	7.29	10,68	3,87

Si noti che, mentre per i quattro elementi — K, Ca, Fe, e P — le differenze tra foglie bianche e foglie verdi sono concordanti per tutt'e tre le specie, per ciò che riguarda il magnesio v'è invece sconcordanza.

Dopo quelle del Church, le sole analisi di sostanze minerali, nelle foglie albicate, che potei trovare nella bibliografia, sono quelle di Aso (2), che analizzò foglie di *Arundo Donax*, dopo averne separato le parti bianche dalle verdi. Egli trovò che nelle prime è contenuto il 0,455 % di ossido di Mg; nelle seconde, il 0,513 %.

Clorosi. — Ramann [citato da Sorauer (3)] analizzò foglie di pino affètte da clorosi e trovò che esse contengono 0,2791 % di magnesio, mentre le foglie verdi della stessa pianta ne contengono il 0,6069 %. Schulze, nelle viti sane, trovò, invece, meno magnesio che non in quelle malate di clorosi.

(1) Church A., *Variegated leaves* (Gard. Chronicle II, 586), 1877. — *Chemische Untersuchungen über den Albinismus der Pflanzen* (Centr. Agrik. XVI, 429), an. 1887.

(2) *On the different forms of lime in plants* (Bull. of the Coll. of agric. Tokyo V, 239), an. 1912.

(3) Sorauer, *Pflanzenkrankheiten*, Berlin, an. 1909, I, 305.

E per ciò che riguarda il magnesio, non abbiamo altre analisi di piante clorotiche.

Sulle *foglie autunnali ingiallite* abbiamo analisi: di Grandeau e Fliche [1] i quali in foglie di *Robinia*. *Prunus avium*. *Castanea* e *Betula*. constatarono che la quantità di magnesio aumenta in autunno: di Tucker e Tollens [2] che trovarono anch'essi che il magnesio aumenta nelle foglie di platano sino alla loro caduta, e subisce una debole diminuzione alla fine del periodo vegetativo. Stahl [3] fece fare l'analisi di foglie ancora verdi e di foglie gialle (autunnali) di *Evonymus japonicus*, dalle quali risultò che il magnesio è in maggior quantità nelle foglie gialle. Lo stesso autore fa conoscere però il risultato di alcune analisi di Swart, secondo le quali il ferro e il magnesio sono in quantità minori nelle foglie gialle. In un recentissimo lavoro, lo Swart [4] riporta numerose analisi, secondo le quali, durante il decoloramento delle foglie autunnali, la quantità di magnesio resterebbe costante nel maggior numero dei casi, e in alcuni casi diminuirebbe; ma questa variazione è dall'autore attribuita alle condizioni del materiale analizzato.

Come si vede, i dati analitici su questa questione sono troppo scarsi e contradittorii perchè se ne possa fare alcuna deduzione su un probabile rapporto quantitativo fra magnesio e clorofilla. Assai scarsi sono particolarmente i dati che riguardano le piante albicate.

Mi è quindi parso che fosse interessante e opportuno di fare un'accurata ricerca quantitativa del magnesio in un maggior numero di specie presentanti questo fenomeno. Scelsi a questo scopo: *Vinca minor* var. *foliis variegatis*. *Pelargonium zonale* var. *fol. var.*. *Pandanus javanicus* var. *fol. var.*. *Polygonum orientale* var. *fol. var.*. *Acer Negundo* var. *fraxinifolia*, *Spiraea lobata* var. *fol. var.*, *Funkia lancifolia* var. *albo-marginata*. *Evonymus japonicus* var. *fol. var.*. *Haegopodium podagraria* var. *fol. var.* Aggiunsi a queste anche le analisi di foglie appartenenti a individui in qualche loro ramo colpiti da clorosi: *Camellia japonica*. *Rosa bengalensis*. *Catalpa bignonioides*.

Per ogni specie prelevai tutte le foglie da una stessa pianta; e separai le foglie (o le parti di foglie) bianche da quelle verdi, tagliandole, quando era necessario, con le forbici, ed escludendo sempre i piccinoli, e quelle zone fogliari che apparivano non precisamente bianche o verdi e che non avrei potuto includere con sicurezza nè fra le une, nè fra le altre.

(1) Grandeau e Fliche, (Ann. Stat. agron. de l'Est, an. 1878).

(2) Tucker e Tollens, *Ueber den Gehalt der Platanenblätter an Nahrstoffen und die Verwendung dieser Nahrstoffe beim Wachsen und Absterben der Blätter* (Journ. f. Landw. XLVIII), an. 1900

(3) Stahl, *Zur Biologie des Chlorophylls*. Jena, an. 1909, pag. 139.

(4) Swart, *Die Stoffwanderung in ablebenden Blättern*. Jena, an. 1914.

L'incenerimento delle foglie venne fatto secondo il König (1); per il metodo d'analisi seguii il Fresenius (2), dosando il magnesio allo stato di pirofosfato.

I risultati ottenuti sono riassunti nella tabella riportata alla pagina seguente.

Dai dati analitici ivi riportati si deduce:

1°) che nelle piante affètte da clorosi risultò, in due casi su tre, maggiore la quantità di magnesio contenuta nelle parti clorotiche. Probabilmente la varia natura delle cause fisiologiche, che, a quanto si ritiene oggidì, possono provocare la clorosi, esercita, a seconda dei casi, influenze diverse sull'assorbimento dei sali: di qui i risultati varii ottenuti da queste analisi e da quelle eseguite dagli autori su citati, che dosarono il magnesio contenuto nelle piante clorotiche (3);

2°) che nelle piante albicate la quantità di magnesio risultò, in otto casi su nove, maggiore nelle parti verdi rispetto alle parti bianche dello stesso individuo: risultato che conferma esservi uno stretto rapporto fisiologico tra magnesio e clorofilla.

In base a questi risultati mi permetto di dissentire dallo Swart per ciò che riguarda l'interpretazione dei suoi dati analitici. Secondo quest'autore, non v'è contraddizione tra il fatto che il magnesio non diminuisca nelle foglie ingiallite e la presenza del magnesio nella clorofilla, perchè (a suo avviso), essendo la quantità di magnesio contenuta nella clorofilla una piccola porzione della quantità totale di questo elemento contenuta nella pianta, la variazione di questa piccola quantità, anche se si verificasse, non avrebbe importanza. Ammetto anch'io che contraddizione non vi sia; ma osservo che una più probabile causa della costanza quasi generale che lo Swart constata nella quantità del magnesio durante l'ingiallimento delle foglie, è non l'errore analitico, ma bensì la non avvenuta emigrazione di questo elemento dopo la scissione della clorofilla.

(1) König, *Die Untersuchung landwirtschaftlich und gewertlich wichtiger Stoffe*. Berlin, an. 1906, pag. 194.

(2) Fresenius R., *Traité d'analyse chimique quantitative*. Paris, an. 1909, vol. I, 255 e 644; II, 466.

(3) Per quanto ancora non siano state fatte esperienze in proposito, noto che già da qualche anno trovansi in commercio sostanze a base di sali di magnesio, il cui uso viene consigliato pei terreni calcari ove appare la clorosi. Esempio: il concime « La fertilité » della « Société des produits dolomitiques de l'Hérault » Infatti, anche nella letteratura si trovano casi di clorosi guarita con somministrazione di sali di magnesio: vedi Soraner (loc. cit.) per la clorosi del pino; Bourcart (*Le maladies des plants*, Paris, an. 1910), e Accardi (*La clorosi delle viti americane*, Napoli, an. 1913), secondo il quale la clorosi permanente deve ascriversi specialmente alla deficienza di assorbimento del magnesio da parte della pianta.

Nome della pianta		Ceneri % sul peso secco	Mg O % sul peso secco	*Osservazioni*
Vinca minor	foglie bianche	15,91	4,09	Foglie totalmente o per metà bianche.
	» verdi	10,74	4,55	
Pelargonium zonale	» bianche	15,85	3,96	Poche foglie bianche; la maggior parte giallastre.
	» verdi	16,52	3,67	
Pandanus javanicus	» bianche	8,12	8,19	Foglie a lunghe zone bianche.
	» verdi	6,14	10,85	
Polygonum orientale	» bianche	11,51	10,94	Foglie con zone bianche e giallastre.
	» verdi	12,11	14,23	
Acer Negundo	» bianche	11,77	4,23	Foglie verdi, e foglie perfettamente e completamente bianche.
	» verdi	9,17	6,98	
Spiraea lobata	» bianche	12,18	5,25	Molte foglie completamente bianche, altre giallognole.
	» verdi	9,29	7,92	
Funkia lancifolia	» bianche	15,01	4,38	Foglie con larghe zone perfettamente bianche.
	» verdi	8,66	6,80	
Evonymus japonicus	» bianche	11,81	4,29	Numerose foglie totalmente bianche; altre zonate di bianco.
	» verdi	10,48	4,43	
Haegopodium podagraria	» bianche	16,90	5,01	Foglie totalmente o per metà bianche.
	» verdi	13,80	6,34	
Camellia japonica	» bianche	6,60	8,52	Piante diverse che nell'estate 1914 presentarono foglie clorotiche, alcune delle quali perfettamente bianche.
	» verdi	5,52	11,56	
Rosa bengalensis	» bianche	7,05	9,17	Pianta in cui alcuni rami apparvero nell'agosto 1909 eziolati, ma in cui le foglie rimasero verdiccie.
	» verdi	11,37	7,00	
Catalpa bignonioides	» bianche	—	9,36	Pianta che nell'estate 1912 presentò un grosso ramo le cui foglie erano quasi totalmente bianche.
	» verdi	—	9,32	

Infatti, che l'assenza della clorofilla sia collegata con una diminuzione del magnesio, è ben dimostrabile con l'analisi, come si rileva dai risultati da me ottenuti; ciò che non sappiamo è quello che avvenga allorchè la clorofilla si scinde o comunque si trasforma (clorosi, ingiallimento autunnale); quali siano cioè i prodotti della decomposizione che emigrano, e quali quelli che permangono nella foglia. Ma osservando che tanto diversi sono i risultati ottenuti dai varii autori (Grandeau e Fliche, Tucker e Tollens, Stahl, Swart) a me pare non improbabile l'ipotesi che, almeno per ciò che riguarda l'emigrazione del magnesio, ogni pianta possa avere un comportamento suo proprio a seconda della natura della sua clorofilla, dell'epoca d'ingiallimento delle sue foglie, della maturazione dei suoi frutti, ecc.; a seconda, cioè, dei varii e complessi mutamenti che avvengono nel chimismo cellulare della pianta durante quel periodo di tempo nel quale essa perde le foglie, e ancora più durante il periodo che immediatamente precede questo fenomeno.

Lo stesso non può dirsi per il caso delle piante albicate, da me studiato a fine di dimostrare la concomitanza dei due fatti: assenza, o quasi, di clorofilla, e minor quantità di magnesio. In questo caso non si tratta di piante nelle quali avvenga un temporaneo e quasi subitaneo fenomeno di squilibrio, come nel caso della clorosi e dell'ingiallimento autunnale; ma di piante nelle quali i germogli, sin dal loro apparire, sono o albicati o verdi, il che dà un'apparenza di fatto quasi normale a questo fenomeno, che non si sa ancora se si debba o no considerare come patologico.

Conclusione.

Dalle analisi comparative di foglie e parti di foglie bianche e verdi appartenenti ad una stessa pianta albicata, si rileva che l'assenza totale, o quasi, di clorofilla nelle foglie, è accompagnata da una minore percentuale del magnesio in esse contenuto. Questi risultati, come quelli resi noti in una mia precedente Memoria, vengono in appoggio alla constatazione, fatta da Willstätter, che la clorofilla è un composto magnesiaco.

Chimica-fisiologica. — *Proprietà chimiche e chimico-fisiche dei muscoli e dei succhi muscolari.* Nota VI: *Sul contenuto in fosforo dei muscoli striati bianchi e rossi*, del dott. G. Quagliariello, presentata dal Corrisp. Filippo Bottazzi.

Chimica-fisica. — *Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue.* II: *Mobilità dell'ione* HCO'_3 *a varie temperature.* Nota dei dottori E. D'Agostino e G. Quagliariello, presentata dal Corrispondente F. Bottazzi.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sul rapporto fra centri corticali del giro sigmoideo e sensibilità cutanea nel cane* (1). Nota del dott. G. Amantea, presentata dal Socio L. Luciani.

Una classica serie di indagini fisiologiche, eseguite col metodo delle ablazioni parziali della corteccia cerebrale (Hitzig, Goltz, Munk, Luciani e Tamburini, Carville e Duret, ecc. (2)) ha permesso di dimostrare sperimentalmente, nel cane e nella scimmia, che esiste un rapporto funzionale tra i centri della zona cosidetta eccitabile e la sensibilità cutanea. Anzi, appunto in base ai risultati di queste ricerche, il Luciani sostenne il concetto che la cosidetta zona eccitabile « logicamente non può essere definita come *sensitiva*, nè come *motrice*, ma deve essere considerata come *sensitivo-motrice*. *Motrice*, perchè rappresenta quella parte della corteccia cerebrale che è direttamente connessa, per mezzo di fibre efferenti di proiezione, coi centri motori inferiori, mesencefalici, bulbari e spinali, e perchè è da essa che emanano gli impulsi e s'inizia la prima fase degli atti muscolari volontarî; *sensitiva*, perchè gli atti volontarî sono guidati e governati dalle sensazioni cutanee e muscolari, e quindi le parti della corteccia nelle quali essi si originano debbono trovarsi in intimo nesso coi centri percettivi di dette sensazioni; *sensitiva-motrice*, infine, perchè i disturbi che conseguono alla distruzione della zona rolandica non sono nè esclusivamente motori, nè esclusivamente sensitivi ».

In seguito alle osservazioni accennate, si può dire che nulla di più la fisiologia sperimentale ha potuto aggiungere alle conclusioni molto generali, cui il metodo delle ablazioni aveva condotto.

Nel corso di numerose mie ricerche, eseguite col metodo della stimolazione chimica sui centri corticali del giro sigmoideo nel cane (3), ho avuto occasione di osservare dei fenomeni, che mi hanno aperto la via ad una nuova serie di indagini sul rapporto tra i centri suddetti e la sensibilità cutanea, le quali tendono a precisare ed a illuminare ulteriormente la que-

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. L. Luciani

(2) L. Luciani, *Fisiologia dell'uomo*, IV ediz., vol. III, 1913.

(3) G. Amantea, Zentralbl. f. Phys., Bd. XXIV, n. 5; id., Arch. di farmac. sper. e sc. aff., vol. XIV, 1912; id., Arch. di fisiol., vol. XI, 1913; S. Baglioni e G. Amantea, *Mélanges biolog. déd. à Ch. Richet*, pag. 11, 1912; Arch. di farmac. sper. e sc. aff., vol. XVII, 1914, e Zeitschr f. biol. Technik u. Methodik, Bd. III; G. Amantea, Arch. di fisiol., vol. XII, 1914.

stione. Qui voglio appunto accennare al nuovo metodo sperimentale e alle mie prime osservazioni.

È un fatto bene accertato, che, quando si applica stricnina (in soluzione acquosa all'1 %) su un centro corticale del giro sigmoideo nel cane, si ottengono scosse cloniche e ritmiche del gruppo muscolare ad esso corrispondente, come per i primi hanno dimostrato S. Baglioni e M. Magnini (1). Ebbene, lavorando sotto la direzione di S. Baglioni, io ho potuto assicurarmi (2) che sono capaci di aumentare entro certi limiti la frequenza e l'intensità di queste scosse tutti gli eccitamenti provenienti dagli organi di senso superiori (specialmente da quello uditivo) e tutti gli eccitamenti afferenti (sensitivi) tattili o dolorifici partenti dalle regioni cutanee del corpo dell'animale, ciò che fa pensare a fenomeni di sommazione o di agevolazione.

Continuando le mie esperienze, mi accorsi, però, che tutto questo si verifica nel caso in cui l'eccitamento corticale indotto dalla stricnina ha raggiunto un grado relativamente elevato, o quando si siano fatte più applicazioni successive e sempre efficaci della sostanza, pur avendo avuto la massima cura (in ciò appunto consiste il fondamento del nostro metodo di stimolazione chimica) nel circoscriverne e limitarne l'azione. Mi fu dato anche di osservare che, nel periodo in cui si presentano le prime scosse cloniche spontanee, gli eccitamenti che provengono dagli organi di senso superiori possono riuscire inefficaci, mentre è già evidente l'influenza degli stimoli (tattili e dolorifici) portati sulla cute; ed anche questi ultimi non sono sempre efficaci su qualsiasi regione del corpo dell'animale, ma, talora, solo su determinate aree cutanee. Solo stimolando tali aree in simili casi la scosse divengono più numerose e più forti. Se poi l'eccitamento corticale indotto dalla stricnina diviene gradualmente più elevato, questa limitazione a mano a mano scompare, e tutta la cute dell'arto, che è sede dei muscoli in clono, risponde allora agli stimoli nel senso sopra accennato, come se fosse divenuta quasi iperestesica.

Però, anche nei casi, in cui si è ripetuta più volte successive l'applicazione di stricnina, e lo stato di eccitamento corticale è divenuto, da qualche tempo, massimo, si può spesso, mercè un esame accurato, accertare, che esiste in realtà una differenza tra l'effetto di stimolazioni eseguite sulle cute dell'intero arto, che presenta le contrazioni cloniche, e l'effetto di stimolazioni eseguite su altri punti della superfice cutanea: nel primo caso l'effetto è positivo e costante; nel secondo, spesso incerto o affatto mancante.

Ma il fenomeno da me osservato, e che mi parve degno della massima attenzione, è il seguente: il periodo delle scosse cloniche spontanee da stricnizzazione corticale è immediatamente preceduto da un altro, che può anche

(1) S. Baglioni e M. Magnini, Arch. di fisiol., vol. VI, an. 1909.

(2) S. Baglioni e G. Amantea, *Mélanges biolog. déd. à Ch. Richet*, pag. 21, 1912.

essere assai breve, ma che non manca mai, durante il quale le contrazioni cloniche si possono ottenere *solo in via riflessa*, stimolando regioni cutanee ben *circoscritte e determinate* dell'arto che è sede del clono. La cute di tali regioni sembra divenuta, come ho accennato più sopra, quasi iperestesica; e gli stimoli portati su di essa esplicano, al solito, la loro azione provocando una o più contrazioni successive del gruppo muscolare corrispondente al centro stricninizzato. Stimolando altre aree cutanee, ciò non si ottiene, e la differenza è spesso nettissima nel breve periodo in cui è dato osservarla.

Era logico di pensare, dopo ciò, che appunto il poter prolungare questo periodo, così da permettere una più agevole condizione di osservazione e una maggior precisione di indagine, avrebbe potuto costituire una nuova ed utile applicazione del nostro metodo di stimolazione chimica circoscritta corticale, mercè la stricnina.

Pensai di tentare la soluzione del problema, regolando o graduando l'applicazione della sostanza chimica in rapporto al vario e variabile grado di eccitabilità corticale degli animali (cani) da esperimento, in modo da ottenere, eventualmente, che le scosse cloniche, invece di manifestarsi in maniera spontanea, potessero destarsi *solo in via riflessa*, per azione di stimoli tattili o dolorifici applicati sulla cute. Le dosi di stricnina da noi di solito adoperate (soluzione all'1 %), il più delle volte determinavano troppo rapidamente, nel centro stimolato, il grado di eccitamento massimo, che si rivela colle scosse spontanee; e l'applicazione di stricnina in soluzioni più diluite e appropriate avrebbe forse potuto permettere di raggiungere lo scopo.

Così facendo, cioè applicando (sempre con la tecnica, per i particolari della quale rimando a quello che è stato altrove pubblicato [1]) soluzioni di stricnina di concentrazione crescente, dalla proporzione di 1 : 2000 a quella di 1 : 200, ho potuto accertare che *è possibile di trovare, per ogni cane su cui si esperimenta, una soluzione di stricnina di concentrazione tale, che, applicandola una o più volte successive sul centro corticale voluto del giro sigmoideo, ne modifichi la funzione, in maniera da rendersi efficaci su determinate aree cutanee stimoli tattili o dolorifici, prima inefficaci, i quali a loro volta destano in via riflessa una o più contrazioni cloniche successive di determinati gruppi muscolari.*

La concentrazione media sufficiente, nella maggior parte dei casi, mi risulta essere quella compresa tra 1 : 1000 e 1 : 500.

Dopo aver localizzato, mercè la corrente faradica, il centro sul quale si vuole sperimentare, si incomincia coll'applicarvi (servendosi di dischetti

[1]) Baglioni e G. Amantea, Arch. di farm. sper. e sc. aff., vol. XVII, an. 1914; Zeitschr. f. biol. Technik u. Metodik, Bd. III.

di carta da filtro di 1-3 mm. di diametro) una soluzione debole. per poi passare. se è necessario, a quelle più forti. Prima e dopo l'applicazione della sostanza chimica sul centro, si saggia lo stato della sensibilità cutanea in modo rapido, servendosi di stimoli dolorifici, e confrontando i risultati che si possono ottenere su regioni corrispondenti dei due lati del corpo dell'animale. Le esperienze sono delicate, e richiedono pazienza e costanza.

Fig. 1.

Fig. 2.

In conclusione, non generose ablazioni e rilievo dei conseguenti sintomi di deficienza sensitivo-motrice, sì bene esaltamento dell'attività di singoli centri ben localizzati e rilievo delle eventuali connessioni funzionali con determinate aree cutanee e determinati gruppi muscolari: questo il fondamento della nuova tecnica, che mi sono proposto di seguire.

Finora ho potuto sperimentare già su parecchi cani, rivolgendo specialmente l'attenzione ai centri corticali per gli arti anteriori. E più volte ho potuto così osservare, per es., il seguente fatto: *quando si stricninizza il centro per l'estensione delle dita di un arto anteriore, l'area cutanea iperestesica si presenta generalmente circoscritta alla cute della superfice superiore o dorsale dell'estremità dell'arto stesso* (ved. fig. 1); *quando invece si applica la stricnina sul centro dei flessori delle dita, l'area iperestesica corrisponde alla cute della superfice plantare* (ved. fig. 2).

Già quello soltanto che ho esposto potrebbe bastare per numerose considerazioni, e per una discussione completa sul valore dei fenomeni osservati. Ma mi sembra più opportuno di limitarsi, per ora, al semplice rilievo dei fatti: chè quando altre osservazioni avranno completato quelle già eseguite, le considerazioni e le discussioni teoriche potranno trovarvi più ampia base di sostegno, guadagnando in efficacia.

Voglio solo fin da ora far notare che i fatti da me accennati possono considerarsi come l'espressione e la conferma insieme, del concetto limpidamente espresso dal Luciani, e ricordato al principio della presente Nota.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli anfibî all'ambiente liquido esterno, mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni.* IV: *Il tempo entro il quale avviene la regolazione osmotica.* Nota di Bruno Brunacci, presentata dal Socio L. Luciani.

Un altro problema che mi sono proposto di risolvere è stato quello relativo *al tempo necessario alla rana esculenta estiva per mettersi in equilibrio osmotico coll'ambiente*, e ciò, tanto per gli animali trasportati dall'acqua dolce (acqua piovana di cisterna $\Delta = 0°{,}01$) in soluzione Ringer ipertonica, quanto per quelli che dall'ambiente ipertonico erano riportati nell'acqua dolce corrente.

Le esperienze sono state fatte tenendo i recipienti ove erano le rane, in locale a temperatura quasi costante (temperatura circa 12° C.) ed al buio (sotterraneo annesso all'Istituto).

Nelle tabelle 6ª e 7ª (serie *E*) sono trascritti i dati sperimentali ottenuti.

Per quanto concerne *le rane che dall'acqua dolce venivano poste nella soluzione Ringer ipertonica,* si constata che sono state necessarie 8-9 ore perchè i liquidi interni degli animali riuscissero non solo a raggiungere il livello di concentrazione molecolare iniziale dell'ambiente esterno, ma a sorpassarlo; mentre un tempo minore (6-7 ore) si mostrò insufficiente. Ciò si è osservato tanto per la soluzione Ringer ipertonica massima (contenente cioè il 10 ‰ di NaCl; cfr. esp. I, tab. 6ª), quanto per la soluzione Ringer meno concentrata (Na Cl gr. 9 ‰: cfr. esp. II, tab. 6ª).

Come ho detto nella Nota precedente, è caratteristico il fatto che la regolazione osmotica della rana avviene, nelle prime ore dell'adattamento, soprattutto a spese degli elettroliti, mentre nei giorni successivi essa è dovuta più a sostanze organiche osmoticamente attive costruite dall'organismo stesso dell'animale (cfr. tab. 4-5-6).

La linfa dei sacchi, scarsa nelle prime 6-7 ore, cresce, successivamente, moltissimo. L'urina si forma, invece, parecchio tempo più tardi della linfa.

Circa *le rane trasportate nell'acqua dolce corrente dopo aver soggiornato per vari giorni in ambiente ipertonico,* si nota che esse — già nelle prime 6-7 ore — non hanno quasi più linfa nei sacchi linfatici (della quale erano pieni), mentre non di rado si accumula una abbondantissima quantità di urina in vescica. Verso la decima ora di permanenza nell'acqua dolce corrente, anche l'urina scompare, infine, del tutto.

Sembra che le rane le quali avevano soggiornato in soluzione Ringer più concentrata (Na Cl gr. 10 $^{0}/_{00}$; esp. I, tab. 7ª) impieghino più tempo per adattare la concentrazione del loro sangue alle mutate condizioni di ambiente, di quelle che erano state tenute nella soluzione salina meno concentrata (Na Cl gr. 9 $^{0}/_{00}$; esp. II, tab. 7ª).

Ad ogni modo, *occorre minor tempo per far aumentare la concentrazione molecolare dei liquidi interni dell'animale, che non per far perdere ad essi la concentrazione maggiore, alla quale erano prima pervenuti.*

Il fatto, sul quale ho già richiamato l'attenzione nella Nota precedente (cioè che le rane, le quali hanno soggiornato in ambiente ipertonico, non riescono, se trasportate in acqua dolce, a raggiungere quel livello minimo di concentrazione molecolare del proprio sangue, al quale giungono invece gli animali posti direttamente nell'acqua dolce senza aver in precedenza soggiornato in soluzione Ringer concentrata), potrebbe anche essere spiegato ammettendo un più difficile passaggio di elettroliti dall'interno all'esterno dell'organismo. Ma l'aver osservato (cfr. Nota precedente) che le rane provenienti da altra località (Grosseto), tenute in identiche condizioni di quelle dei dintorni di Siena (stesso numero di giorni di permanenza in acqua di condotta sino a depurazione, e successivo soggiorno, di eguale durata, in acqua distillata), presentavano una maggiore concentrazione molecolare del loro sangue, può far pensare anche — come si disse — alla possibilità di una fissazione, nel sangue, di caratteri osmotici acquisiti dall'ambiente esterno.

Tabella 6ª.

Serie **E.** *Il tempo entro il quale avviene la regolazione osmotica.*

a) *Rane escul. estive trasportate dall'acqua di condotta in soluzione ipertonica*

Num. e data		Δ	$R_{2s°}$ (in Ohm)	N tot. gr. %	Residuo secco a 110° C gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	Osservazioni
	Liquido ambiente	0.665°	19	—	—	—	—	Rane tenute in soluzione Ringer contenente circa il 10 ‰ di NaCl + gli altri sali in proporzione.
1. I) Dopo 6-7 ore	Sangue defibrinato	0.605	32	—	—	—	—	Temperatura circa 12° C. All'oscuro.
(28-29 VIII 1911)	Siero dello stesso	0.630	24	0.5908	4.1900	0 3235	3 8665	Da 23 rane, niente *urina*; il *sangue* esce meglio che nelle rane tenute in acqua distillata, e coagula più facilmente. La *linfa* dei sacchi è scarsa (da 23 rane si ricavano circa 6-7 cmc. di linfa.
	Linfa defibrinata	0.645	27	0.2706	2.4266	0.4122	3.0144	
	Urina	—	. .	—	—	—	—	
	Liquido ambiente	0 635°	19	—	—	—	. . .	Da 24 rane, solo 1 2 rane forniscono poche gocce di *urina*; le altre niente. Moltissimo *liquido* nei *sacchi linfatici* (da 24 rane circa 35 cmc.), spontaneamente coagulabile.
	Sangue defibrinato	0 685	31	.	—	—	. . .	
» II) Dopo 8-9 ore	Siero dello stesso	0.670	22	0.5880	4 1350	0 4108	3.7242	
	Linfa defibrinata	0 685	20.5	0.2016	2.0481	0.3660	1.6821	
	Urina	—	—	—	—	—	—	
	Liquido ambiente	0.680°	19	—	—	—	—	Da 19 rane, niente *urina*, molta *linfa* nei sacchi (da 19 rane, circa 25 cmc.). *Sangue* con abbondante coagulo. Poco liquido nei tessuti.
	Sangue defibrinato	0.685	25.5	—	—	—	—	
» III) Dopo 27-28 ore	Siero dello stesso	0.670	—	0.4806	3.6088	0.4389	3.1699	
	Linfa defibrinata	0.695	20.5	0 2464	2.3673	0 4390	1.9283	
	Urina	—	—	—	—	—	—	

Serie E. *Il tempo entro il quale avviene la regolazione osmotica.*

a) *Rane escul. estive trasportate dall'acqua di condotta in soluzione ipertonica.*

NUM. E DATA		Δ	$R_{22°}$ (in Ohm)	N tot. gr. %	Residuo secco a 110° C gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	OSSERVAZIONI
2. I) Dopo 6-7 ore (4-5 VIII 1912)	Liquido ambiente	0.560°	21	—	—	—	—	Rane tenute in soluzione Ringer contenente circa il 9 ‰ di Na Cl + gli altri sali in proporzione.
	Sangue defibrinato	0.540	34	—	—	—	—	Temperatura ambiente circa il 12° C All'oscuro.
	Siero dello stesso	0.540	26	0.546	3.509	0.492	3.017	Da 18 rane, poca *linfa* (circa 6 cmc.) nei sacchi linfatici; intensamente colorata in giallo-citrino; molto coagulabile. Niente *urina*. *Sangue* più denso e più coagulabile che nelle rane tenute in acqua distillata.
	Linfa defibrinata	0.540	25	0.403	2.525	0.320	2.205	
	Urina	—	—	—	—	—	—	
» II) Dopo 8-9 ore	Liquido ambiente	0.530°	21	0 026	—	. . .	. . .	Da 19 rane, *linfa* dei sacchi poca (circa 7 cmc). Giallo-citrino-chiara; spontaneamente coagulabile. *Urina* pochissima (da 19 rane circa 3 cmc). *Sangue* come sopra.
	Sangue defibrinato	0.560	32	—	—	. . .	. . .	
	Siero dello stesso	0.545	25	—	3.465	0.242 (?)	3.223 (?)	
	Linfa defibrinata	0.555	27	0.431	2.376	0.400	1.976	
	Urina	—	—	0.257	—	—	—	
» III) Dopo 24-25 ore	Liquido ambiente	0.570°	20.5	0.014	—	-	—	Da 21 rane, *linfa* dei sacchi *molta* (circa 25 cmc.). *Urina* più abbondante delle precedenti (circa 7 cmc.). Liquido ambiente colorato in verdastro.
	Sangue defibrinato	0.580	30	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0.580	23	—	3.104	0.560	2.544	
	Linfa defibrinata	0.575	22	0.234	1.995	0.606	1.389	
	Urina	0.550	22	0.132	—	—	—	

Serie E. TABELLA 7ª.

Il tempo entro il quale avviene la regolazione osmotica.

b) *Rane escul. estive trasportate dalla soluzione ipertonica nell'acqua di condotta.*

NUM. E DATA		Δ	$R_{22°}$ (in Ohm)	N tot. gr. %	Residuo secco a 110° C. gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	
1. I) Dopo 10 ore (8-9-IX-1911)	Liquido ambiente	—	—	—	—	—	—	
	Sangue defibrinato	0.540°	38	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0.519	30	0.5506	3.8824	0.3100	3.5724	(1)
	Linfa defibrinata	0.480	30	0.2068	1.9581	0.2277	1.7304	
	Urina	—	—	—	—	—	—	
» II) Dopo 24 ore	Liquido ambiente	—	—	—	—	—	—	
	Sangue defibrinato	0.495	38	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0.485	30	0.490	3.5986	0.3084	3.2902	(2)
	Linfa defibrinata	—	—	—	—	—	—	
	Urina	—	—	—	—	—	—	
2. I) Dopo 6-7 ore (11-VIII-1913)	Liquido ambiente	—	—	—	—	—	—	
	Sangue defibrinato	0.490°	35	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0.455	30	—	3.056	0.371	2.685	(3)
	Linfa defibrinata	—	—	—	—	—	—	
	Urina	0.190	65	—	—	—	—	
» II) Dopo 8-10 ore	Liquido ambiente	—	—	—	—	—	—	
	Sangue defibrinato	0.465	35	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0.445	30	—	2.919	0.331	2.588	(4)
	Linfa defibrinata	—	—	—	—	—	—	
	Urina	—	—	—	—	—	—	

(1) Rane restate 5 giorni in soluzione Ringer ipertonica (circa 10 ‰ di Na Cl), si mettono nell'acqua corrente di condotta (*acqua piovana di cisterna*). — *Dopo 10 ore*, niente *urina* in vescica. *Linfa* ancora presente, solo in alcune rane; nelle altre niente (da 5-6 rane se ne raccolgono cmc. 8 circa).

(2) *Dopo 24 ore*, niente *urina*; pochissima *linfa* (solo 4-5 rane ne hanno fornito 1-2 cmc. insufficienti alle ricerche).

(3) Rane restate 6 giorni in soluzione Ringer ipertonica (circa 9 ‰ di Na Cl), si mettono nell'acqua corrente di condotta (acqua di cisterna, piovana). — Da 18 rane, *dopo 6-7 ore*, la *linfa* che, appena poste nell'acqua di condotta, avevano tutte, è quasi completamente scomparsa. Solo 2-3 rane ne avevano, ma poca. Parecchia *urina* in vescica. Qualche rana, appena presa, entra in tetano e muore.

(4) *Dopo 8-10 ore*, da 18 rane, *niente linfa* nella massima parte di esse. Solo 2 rane ne avevano ancora (3-4 cmc.), coagulabile spontaneamente ed abbondantemente. *Urina* scarsissima; solo 2-3 rane ne avevano ancora un poco; le altre niente. — Centrifugando il *sangue* si nota un'*eccessiva scarsezza* di *corpuscoli rossi* mentre il siero si presenta di colore rosso-mattone scuro (*emolisi accentuata* con disfacimento corpuscolare (?).

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli anfibî all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni*: VII. *Importanza della vescica urinaria.* VIII. *I fenomeni dell'adattamento nelle rane escul. ibernanti.* Note del dott. B. Brunacci, presentate dal Socio L. Luciani.

Chimica fisiologica. — *Sulla possibilità di titolare al formolo l'azoto aminico monosostituito.* Nota del dott. Antonino Clementi, presentata dal Socio L. Luciani.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente da il triste annuncio della morte del Corrispondente prof. Arturo Marcacci, avvenuta il 19 gennaio 1915; apparteneva il defunto all'Accademia, per la *Fisiologia*, sino dal 14 luglio 1907. Comunica anche la morte del Socio straniero prof. Arturo von Auwers, mancato ai vivi il 24 gennaio 1915; faceva parte il defunto dell'Accademia, per l'*Astronomia*, sino dal 7 settembre 1888. Ed annuncia che la Classe deve deplorare anche la perdita del Socio straniero John Murray, il quale apparteneva all'Accademia per la *Zoologia* e *Morfologia*, sino dal 9 settembre 1912.

Il Corrisp. Reina legge la seguente Commemorazione del prof. Adolfo Venturi:

Il giorno 28 dicembre 1914 spegnevasi in Palermo, dopo breve malattia, il prof. Adolfo Venturi, docente di Geodesia teoretica e di Meccanica superiore in quella Università. La luttuosa notizia, diffusa al chiudersi dell'anno, riempiva di amaro cordoglio colleghi, amici, discepoli.

Nato a Firenze il 22 settembre 1852, Egli compiva i suoi studî nella Università di Pisa, ottenendovi la laurea nella Facoltà fisico-matematica (1875), e tosto veniva nominato professore di matematica nel Liceo di Como. Fornito di soda cultura matematica, desideroso di ricerca, non abbandonava gli studî superiori, ma con operosa costanza dedicava le proprie forze ad approfondire le teorie della Meccanica celeste, impiegandovi le ore lasciate libere dall'insegnamento, e nel 1879 pubblicava il suo primo lavoro *Teoria del*

moto della Terra intorno al suo centro di gravità. Il lavoro è di natura monografica, il classico problema già essendo stato risoluto per opera di Eulero, D'Alembert, Laplace, Poisson, Serret ed altri; ma la chiara esposizione, la armonica funzione dei risultati da altri ottenuti con procedimenti diversi, la sicurezza nel maneggio delle funzioni sferiche ed ellittiche, e gli sviluppi originali intesi a completare e raffinare la soluzione nelle varie sue parti, già dimostravano che il Venturi, se da un lato nutriva l'aspirazione di percorrere la carriera degli studî superiori, possedeva dall'altro la tempra a ciò occorrente.

Poco dopo (1883), negli Annali della Scuola normale superiore di Pisa, pubblicava la dissertazione *Sul moto perturbato delle comete*, nella quale, pur seguendo nelle sue linee generali un metodo dovuto ad Hansen, lo modifica opportunamente con un mutamento di variabile, in guisa da ottenere serie molto più convergenti di quelle impiegate dallo stesso Hansen.

In quell'epoca il prof. Schiaparelli, direttore dell'Osservatorio di Brera, compieva i suoi memorabili studî sulle comete, le stelle cadenti, la topografia di Marte ecc., ed era ben naturale che il giovane studioso della meccanica dei cieli si sentisse attratto verso l'astro maggiore. Incominciarono a diventar frequenti le escursioni fra Como e la vicina Milano, ed il Maestro non mancò di essere largo di consigli e di aiuto al giovane scolaro così pieno di fede e di ardore. Ne uscì un lavoro di gran peso: *Il metodo di Hansen per calcolare le perturbazioni dei piccoli pianeti, interamente rifuso*. La esposizione del metodo, fatta dallo stesso Hansen, era involuta ed oscura, così che pochi erano gli astronomi i quali, rendendosene ragione, erano in grado di poterlo con piena conoscenza applicare. Il Venturi riprende il problema dalle sue basi, trascura tutto ciò che non è strettamente legato all'argomento, introduce nuove variabili atte a semplificare gli sviluppi ed a facilitare la costruzione delle Tavole, scopo ultimo della ricerca, come quelle che debbono essere messe a disposizione dell'astronomo calcolatore, ed imprime a tutto il lavoro un carattere personale e quasi di originalità. Occorreva però ancora mettere alla prova in un caso pratico la facilità di applicazione dei procedimenti sviluppati: ed anche questo viene fatto con pieno successo in un ulteriore lavoro, *Le perturbazioni assolute di Feronia (72) prodotte dalla attrazione di Giove*.

I due poderosi lavori, presentati alla Accademia dei Lincei al concorso per l'Astronomia scaduto il 31 dicembre 1884, ottenevano il premio reale nel 1886.

Questa solenne attestazione di merito costituiva la miglior prova che il Venturi era oramai preparato ad entrare nella carriera universitaria, e l'occasione non tardò a presentarsi. Nel 1888 veniva aperto il concorso alla

cattedra di Geodesia teoretica nella Università di Palermo, ed Egli vi si presentava solo. La Commissione esaminatrice non esitava a pronunciare un giudizio pienamente favorevole, pur notando come i titoli esibiti non rispondessero strettamente alla natura della cattedra, nè costituissero una prova della attitudine del concorrente a ricerche sperimentali e d'osservazione. Opinava però, in pari tempo, non essere svantaggioso alla scienza imprimerle nelle diverse cattedre un diverso indirizzo; così che, mentre in talune era dato maggior risalto alla parte pratica, potevasi con proficuità dare in altre prevalente sviluppo a corsi teorici.

Mente versatile, dotata di grande adattabilità, il Venturi risponde da par suo alla fiducia in lui riposta dalla Commissione esaminatrice, e, passando a Palermo, muta completamente l'indirizzo delle sue ricerche, dedicandosi a tutt'uomo a lavori di osservazione e di Geodesia operativa. Suo primo pensiero è di creare una Specola geodetica sull'edificio della Scuola degli ingegneri, e di collegare questa e l'Osservatorio astronomico alla rete trigonometrica di 1° ordine dello Stato. Provvede degli strumenti occorrenti il suo nascente Gabinetto, ne fa uno studio accurato, traccia e misura la rete di riattacco, la assoggetta al calcolo di compensazione valutandone il grado di precisione, fa il trasporto della latitudine e della longitudine geodetica lungo i lati della rete, ne fa il confronto colla latitudine e colla longitudine astronomica dell'Osservatorio, e perviene così alla determinazione della attrazione locale. Questo primo lavoro, che doveva servire di modello ad altri compiuti successivamente in Italia, è condotto con grande perizia, e già rivela il provetto geodeta.

Ma qui Egli non si arresta: ricostruita e provveduta di apposita copertura metallica la Specola geodetica della Martorana, vuole effettuarvi una determinazione astronomica di azimut, assumendo come direzione di riferimento quella di monte Alfano, e basandosi sui puntamenti di α e δ *Ursae minoris*.

A queste misure aggiunge più tardi una determinazione astronomica di latitudine fatta sia col metodo delle distanze zenitali circummeridiane, sia col metodo Besseliano di passaggi nel 1° verticale, e può così determinare per la Specola geodetica le due componenti della attrazione locale rispetto a Castanèa, punto origine per la rete di 1° ordine della Sicilia.

In pari tempo rivolge il pensiero ad un altro problema, di indole tanto fisica quanto geodetica: quello della rifrazione terrestre. Mentre il fenomeno era stato replicate volte studiato all'estero, presso di noi non si avevano che alcune ricerche fatte nel nord d'Italia, in occasione di lavori di triangolazione, per iniziativa dell'Istituto geografico militare, e per opera del prof. Pucci e del colonnello De Stefanis. Il Venturi, desideroso di portare il suo contributo alla soluzione dell'interessante problema, si associa il proprio assistente prof. Soler, e con lui compie una serie di misure di distanze

zenitali reciproche contemporanee fra due punti trigonometrici (Terrazza delle Società di Acclimazione, Semaforo di Capo-Gallo) dei quali vengono prima determinate con grande cura le posizioni geografiche, mentre il dislivello è ricavato dalle stesse misure eseguite. Per controllare i risultati ottenuti con questo primo procedimento, effettua una lunga serie di misure di zenitali marine, tenendo rigorosamente conto delle variazioni del livello del mare, date dal mareografo. Giunge così a determinare il coefficiente medio della rifrazione terrestre in Sicilia, trovandolo più basso che non in altri paesi.

Mentre si dedica a questi lavori di osservazione, non dimentica però gli studî prediletti di Meccanica celeste. Nel 1890-91 ottiene l'incarico di tale materia nella Università, ed a partire da quell'epoca alterna nei corsi la teoria delle orbite e delle loro perturbazioni, colla teoria della forma dei pianeti e delle maree. Intorno alla stessa epoca fa il calcolo della cometa 1890 IV (Zona) avente un'orbita allungatissima, per determinare la quale non dispone che di osservazioni distribuite su un arco di circa 20°. Fa uso del metodo delle formole differenziali di Schönfeld, e dopo aver dato una valutazione delle deformazioni dell'orbita corrispondenti a determinati piccoli spostamenti dei luoghi normali, esamina e discute i risultati che si ottengono quando, invece di una conica libera, si assuma a base del calcolo una conica vincolata.

Su argomenti di Meccanica celeste torna altre due volte; in occasione cioè del discorso *Le dottrine positive nei dinamismi del Cielo*, letto per la inaugurazione della Università di Palermo nel 1897, ed in una recente pubblicazione del 1913, *Uno sguardo alla teoria delle orbite*, nella quale fa un esame della terza edizione della Astronomia teorica di Klinkerfuess elaborata dal dott. Buchholz. Ma prima di addentrarsi nella recensione dell'opera, passa in rassegna sintetica le principali pubblicazioni riguardanti la determinazione delle orbite, distinguendole secondo due scuole, quella fondata da Laplace e quella che ha a capo Gauss, e fa un raffronto fra i due ordini di procedimenti, mettendone in evidenza i vantaggi relativi. Questa rapida sintesi, condotta con grande acume, mostra ad evidenza quale assoluta padronanza egli avesse del difficile argomento e con quanta predilezione lo coltivasse.

Resta da rendere conto di un ultimo gruppo di lavori che occuparono l'attività del prof. Venturi negli ultimi anni: i lavori gravimetrici.

È ben noto quanto difficili, laboriose e delicate siano le misure *assolute* di gravità, ciò che spiega perchè tanto scarso sia stato fino ad ora il loro numero, e perchè tre sole se ne contino in Italia: una a Milano (Biot), una a Padova (Lorenzoni), ed una a Roma (Pisati e Pucci). Ma nel decennio fra il 1880 ed il 1890 una vera riforma effettuavasi in questo campo: per

opera soprattutto di Roberto von Sterneck, veniva costruito un apparato atto a fare determinazioni *relative* o *differenziali* di gravità, così compendioso nella forma e facile di maneggio e di trasporto, da essere tosto riprodotto con successo nei varî paesi e da permettere il rapido moltiplicarsi delle misure gravimetriche. Con un tale apparato il prof. Riccò, fin dal 1896, iniziava una numerosa serie di determinazioni nella regione orientale della Sicilia, facendole dipendere dal valore assoluto della gravità a Vienna (sistema di Vienna); ed a lui tosto faceva sèguito il prof. Venturi per la parte occidentale e le isolette circostanti, usando un apparato analogo, ma con mensola a muro, acquistato per conto del suo Gabinetto.

Le determinazioni del prof. Venturi, iniziate nel 1899, proseguirono fino al 1910, comprendendo 32 stazioni, tre delle quali scaglionate in Tunisia ed una nell'isola di Malta. Esse pure appartengono al sistema di Vienna e sono, per mezzo della stazione comune di Milazzo, collegate con quelle del prof. Riccò. Le misure riunite dei due operatori hanno permesso di costruire la carta delle linee isoanomale della Sicilia, la quale mostra come le anomalie della gravità, negative nel centro dell'isola e quasi evanescenti in corrispondenza all'Etna, vadano crescendo verso la costa e sui mari, assumendo grandi valori sul mar Tirreno e sul mar Jonio che sono profondi, mentre assumono valori assai più bassi sulle coste sud-occidentali dell'isola e sulle coste affacciate della Tunisia, dove il mare presenta poca profondità: il che, a parere dello stesso prof. Venturi, potrebbe forse gettare un pò di luce sulla questione, tanto dibattuta dai geologhi, circa la possibile antichissima congiunzione delle due coste.

L'ultima Nota sull'argomento venne dal prof. Venturi presentata alla nostra Accademia nell'ottobre 1914; ed in essa Egli si riprometteva di riunire ed illustrare, con una Nota ulteriore, tutti i risultati ottenuti. Il suo desiderio doveva, pur troppo, andare frustrato.

A questo gruppo di lavori se ne connettono altri due di indole teorica. L'uno è una esposizione teorica e critica della *Bilancia di torsione di Eötvös*, il nuovo ingegnoso apparato escogitato dal professore di fisica dell'Università di Buda-Pest, per determinare il gradiente orizzontale della gravità. L'altro lavoro, *Gli integrali generali del moto del bipendolo in relazione a movimenti orizzontali intrinseci od estrinseci del supporto*, contiene una esauriente discussione teorica su un problema assai dibattuto negli ultimi anni. Per quanto sicure siano le misure relative di gravità rispetto a quelle assolute, sono però esse pure soggette ad una causa di errore che può, in determinate circostanze, divenir grave: la oscillazione del supporto del pendolo. È per questo motivo che il supporto originario (tripode metallico sostenuto da un pilastro), per il quale l'oscillazione risultava notevole, venne sostituito dalla mensola a muro, colla quale l'oscillazione riesce sempre assai piccola, mentre altri operatori cercarono di risolvere il problema di deter-

minare quantitativamente la correzione da applicarsi alla durata di oscillazione del pendolo per ridurla a supporto rigido, ricorrendo agli apparati bipendolari, tripendolari e quadripendolari.

Il prof. Venturi stabilisce nel suo lavoro le equazioni generali del moto contemporaneo di due pendoli e del loro supporto, e scendendo poi ai casi particolari, ne trae interessanti conclusioni circa la validità di impiego dei varî apparati pendolari.

La carriera del prof. Venturi fu facile e piana. Dal Liceo di Como, sua prima sede, passava all'Università di Palermo, e lì restava fino al termine di sua vita. Socio corrispondente della Accademia dei Lincei, membro della Commissione geodetica italiana, vice-presidente della Accademia di Palermo, presidente della Società palermitana di scienze naturali ed economiche, a tutte queste istituzioni scientifiche portava il contributo della sua operosità, l'operosità calma dell'uomo sereno, contento della propria posizione.

Sua caratteristica fu l'affezione costante per gli uomini e le cose. A Como egli soleva tornare quasi ogni anno nella stagione autunnale, spinto dal desiderio di rivedere il bel lago ed i monti testimonî della sua feconda operosa giovinezza, quasi chiamato dal bisogno di rivedere gli antichi scolari; e questi, animati da un durevole sentimento di gratitudine, festosamente accoglievano l'antico professore che, col magistero di una parola limpida e chiara, aveva reso loro facile una materia difficile.

Ma la maggior somma del suo affetto era riservata a Palermo, sua patria di adozione. Rettore della Università dal 1899 al 1903, dedicava tante cure all'alto ufficio da meritare di essere ricordato in una lapide collocata sull'ingresso del restaurato Ateneo; e la benefica sua azione direttrice proseguiva fino all'ultimo, come preside della Facoltà di scienze fisiche e matematiche.

Se la vista dell'incantevole golfo più non rallegra lo sguardo suo, se le aure profumate che discendono dalla Conca d'Oro alla marina più non alimentano il nobile spirito indagatore, l'esempio di sua vita così pura e serena è per noi incitamento a bene operare.

PUBBLICAZIONI DEL PROF. ADOLFO VENTURI

Teoria del moto perturbato della Terra intorno al suo centro di gravità. Como, 1879.

Sul moto perturbato delle comete. Annali della Scuola normale di Pisa, 1883.

Metodo di Hansen per calcolare le perturbazioni dei piccoli pianeti. Pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera in Milano, n°. XXII, 1882.

Le perturbazioni assolute di Feronia (72) prodotte dalla attrazione di Giove. Mem. della R. Acc. dei Lincei, serie IV, vol. III, 1885-86.

Di una notevole semplificazione nel calcolo delle perturbazioni dei piccoli pianeti. Pubbl. del R. Oss. di Brera in Milano, n°. XXVIII, 1886.

Influenza che la rifrazione astronomico-geodetica esercita sulla formazione dell'immagine del Sole nascente, riflessa sul mare. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1889.

Formazione delle immagini di oggetti celesti o terrestri sulle grandi superficie liquide della terra. Mem. degli spettroscopisti italiani, 1889.

Nuova determinazione della deviazione locale in latitudine e longitudine dell'Osservatorio di Palermo. Giornale di scienze naturali ed economiche, vol. XX, Palermo, 1890.

Sopra un caso generale di compensazione angolare. Rendic. del Circolo matematico di Palermo, 1890.

Orbita definitiva della Cometa 1890 IV (Zona). Giorn. di scienze naturali ed economiche di Palermo, 1891.

Azimut di monte Alfano sull'orizzonte della Specola geodetica della Martorana in Palermo. Pubblicazioni della R. Commissione geodetica italiana, Palermo 1892.

Relazione sul nuovo strumento universale Salmoiraghi. Giornale « Il Politecnico », Milano, 1892.

Prime ricerche sul coefficiente di rifrazione in Sicilia. Atti della R. Acc. di Palermo, 1893 (in collaborazione col prof. E. Soler).

Sulla latitudine della Specola geodetica della Martorana in Palermo. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1897.

Sul coefficiente di rifrazione in Sicilia (secondo contributo). Rivista di topografia e catasto, vol. X, Torino 1897-98 (in collaborazione coll'ing. A. Loperfido).

Sopra alcune proprietà rappresentative degli angoli, e sulla proiezione isodromica. Rivista geografica italiana, Firenze 1898.

Le dottrine positive dei dinamismi del Cielo (Discorso letto il 22 novembre 1897 per la inaugurazione dell'anno accademico). Annuario della R. Università di Palermo, 1898.

Azimut della lanterna del Faro sull'orizzonte della Specola geodetica della Martorana in Palermo. Giorn. delle scienze naturali ed economiche, vol. XXII, Palermo 1899.

Sulla compensazione dei risultati nelle misure di gravità relativa terrestre. Nuovo Cimento, Pisa 1900.

Determinazioni di gravità relativa nella regione occidentale della Sicilia. Atti della R. Acc. di Palermo, 1901.

Nuove determinazioni di gravità relativa in Sicilia. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1905.

Riassunto dei lavori di collegamento e di verifica del valore della gravità in Palermo. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1906.

Terza campagna gravimetrica in Sicilia nel 1905. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1907.

Teoria della bilancia di torsione di Eötvös. Atti della R. Acc. di Palermo, 1908.

Quarta campagna gravimetrica in Sicilia, nel 1906. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1909.

Determinazioni complementari di gravità in Sicilia nel 1907. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1910.

Gli integrali generali del moto del bipendolo in relazione a movimenti orizzontali intrinseci od estrinseci del supporto. Atti della R. Acc. di Palermo, 1911.

Determinazioni di gravità relativa in Tunisia e a Malta nel 1908. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1912.

Determinazioni complementari di gravità in Sicilia, eseguite nel 1910. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1914.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle del Socio Taramelli, dei Corrispondenti Berlese e Canavari, e del prof. Lovisato. Fa inoltre particolare menzione del tomo I delle *Opere complete* di Tommaso Jan Stieltjes, pubblicate dalla Società matematica di Amsterdam.

Il Socio Volterra presenta in omaggio, a nome dell'autore prof. Ernesto Lebon, il rapporto che egli ha comunicato nel 1914 sui lavori compiuti dall'Associazione francese per l'avanzamento delle scienze; ne discorre e ricorda i rapporti dell'Associazione stessa con scienziati italiani e colla Società italiana per il progresso delle scienze. Lo stesso Socio offre anche una copia dei *Verbali delle sedute dell'anno accademico 1913-1914* del Seminario matematico della Facoltà di scienze della R. Università di Roma.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Millosevich dà comunicazione del seguente:

Elenco dei lavori presentati ai concorsi ai premî
del Ministero della Pubblica Istruzione, per le *Scienze fisiche e chimiche.*
(Scadenza 31 dicembre 1914. — Due premî, di L. 2000 ciascuno).

1. Amerio Alessandro. 1) « Fondamenti e progressi della tecnica dell'illuminazione: parti I e II » (st.). — 2) « Azioni di una corrente elettrica e di un campo magnetico trasversale nella magnetizzazione di un filo di ferro » (st.). — 3) « Ricerche sullo spettro e sulla temperatura della fotosfera solare » (st.). — 4) « Lo spettro, la temperatura e lo splendore del cratere nell'arco a carboni, in relazione con la questione dei proiettori » (st.). — 5) « Il cratere del carbone positivo, e la legge del coseno » (st.). — 6) « Equivalenti e rendimenti luminosi dell'energia raggiante » (ms).

2. Bernini Arciero. 1) « Sulle apparenti variazioni della velocità specifica degli joni di fiamma, col campo » (st.). — 2) « Sulla velocità specifica degli joni uscenti dall'arco elettrico » (st.). — 3) « Sul magnetismo susseguente del ferro: parti III, IV e V » (st.). — 4) « Id. id., parte VI » (ms.). — 5) « Ricerche sul magnetismo susseguente nel ferro elettrolitico, nel nichel e cobalto » (ms). — 6) « Sulla dilatazione termica del sodio, del potassio e del litio » (st.).

3. Calcagni Luigi Gennaro. 1) « Azione dei fenoli e degli alcoli sull'etere diazo-acetico » (st.). — 2) « Studî sulla capacità degli ossidrili alcoolici a formare complessi » (st.) — 3) « Basicità degli acidi organici contenenti ossidrili alcoolici » (st.). — 4) « Solfati anidri » (st.). — 5) « I fondamenti della chimica organica » (ms.).

4. Castelli Enrico. « La costituzione delle stelle: saggio di astrofisica elementare (con fig.) » (st.).

5. Coppadoro Angelo. 1) « L'equilibrio nel sistema ternario: nitrato di bario, nitrato di sodio e acqua » (st.). — 2) « Gli equilibrî nel sistema: cloruro di bario, nitrato di sodio, nitrato di bario, cloruro di sodio e acqua » (st.). — 3) Il problema della potassa e l'utilizzazione delle acque madri delle saline » (ms.). — 4) « La trasmutazione degli elementi » (st.). — 5) « La nuova pila elettrica a combustibile, di W. Nernst » (st.). — 6) « I vincitori dei premî Nobel per la chimica e per la fisica, nel 1913 » (st.). — 7) La sintesi del diamante » (st.).

6. Drago Ernesto. 1) « Influenza delle scariche oscillatorie e delle onde elettriche sulla rapidità di smorzamento delle oscillazioni torsionali di fili di ferro » (st.). — 2) « I pericoli delle correnti elettriche » (st.) — 3) « Sull'attrito interno del nichel in campo magnetico variabile » (ms.).

7. Perucca Eligio. 1) « Analisi di vibrazioni luminose debolmente ellittiche, e descrizione di un nuovo apparecchio a penombra » (st.). — 2) « Sull'analizzatore ellittico di Bravais-Zakrzewski » (st.). — 3) « Il potere rotatorio dei cristalli misti $NaClO_3$ - $AgCLO_3$ » (st.). — 4) « Ueber zirkularen Dichroismus des Amethysts » (st.). — 5) « Due noterelle di fisica elementare » (ms.). — 6) « Sull'azione magnetica della luce » (ms.).

8. Platania Giovanni. 1) « Misure della lava fluente dell' Etna » (st.). — 2) « Osservazioni dei punti neutri della polarizzazione atmosferica » (st.). — 3) « Osservazioni pireliometriche eseguite durante l'eclisse del 17 aprile 1912 (in collaborazione col prof. A. Bemporad) » (st.). — 4) « Temperatura superficiale del mare intorno all'isola dei Ciclopi » (st.). — 5) « Il maremoto del 23 ottobre 1907 in Calabria, e la propagazione delle onde di maremoto » (st.). — 6) Le oscillazioni del mare nel golfo di Catania » (st.). — 7) « Osservazioni dei punti neutri della polarizzazione atmosferica eseguite in Catania nel 1912 » (st.). — 8) « Le recenti variazioni del livello del mare in Italia, e la causa del terremoto di Messina e Reggio nel 1908 » (st.). — 9) « Risultati delle osservazioni sul maremoto dello stretto di Messina, 28 dicembre 1908 » (st.). — 10) « Il pulviscolo vulcanico dell'alta atmosfera, e la radiazione solare » (st.). — 11) « Osservazioni dei punti neutri della polarizzazione atmosferica eseguite in Catania negli anni 1913-14 » (st.).

9. Quartaroli Alfredo. 1) « Sulle soluzioni citrofosfatiche » (st.). — 2) « Sull'idrolisi del nitrato di bismuto » (st.). — 3) « Sulle cause d'errore

nella precipitazione del fosfato ammonico-magnesiaco in presenza di citrato ammonico » (st.). — 4) « Ricerche sull'azione dei sali di magnesio sui complessi di alluminio, ferro e bismuto con sostanze organiche » (st.). 5) « Sull'impiego del citrato ammonico nella determinazione dell'acido fosforico » (st.). — 6) « Su di un metodo qualitativo per lo studio della suscettività magnetica delle soluzioni » (st.). — 7) « Suscettività magnetica e dissociazione elettrolitica » (st.). — 8) « Sull'apparente lentezza dell'idrolisi dei sali ferrici » (ms.). — 9) « Sul significato della dipendenza fra suscettività magnetica e dissociazione: associazione fra ioni e solvente » (ms.).

10. Romegialli Emilio Abelardo. « Studio chimico della *cloche*, ossia dei materiali per la fabbricazione dei cappelli detti di feltro di pelo (con album » (ms).

11. Stefanini Annibale. 1) « Le applicazioni della fonetica sperimentale alla clinica » [con G. Gradenigo e C. Biaggi] (st.). — 2) « Alcune esperienze di acustica » (st.). — 3) Sull'influenza delle membrane e dei tubi nella registrazione delle onde sonore » (st.). — 4) « Sull'uso dei tubi di risonanza nella determinazione della tonalità dei suoni, e dei rumori deboli » (st.). — 5 « Sulla determinazione del modulo di elasticità dei solidi » (st.). — 6) Alternatore pendolare elettromagnetico » (bozze di stampa). — 7) « Nuovi studî sulle vocali » (ms.). — 8) « Conferenza sperimentale della teoria Cotugno-Hebnholtz sulla percezione dei suoni » (ms.). — 9). « La teoria della risonanza per la percezione dei suoni » (ms.).

AFFARI DIVERSI

Il Segretario Millosevich, dopo aver riassunta l'opera della spedizione De Filippi al Karakoram ed aver messa in rilievo l'importanza dei risultati ottenuti dalla spedizione stessa, a nome della Presidenza presenta il seguente voto:

« La Reale Accademia dei Lincei, nell'odierna Seduta della Classe delle Scienze fisiche, matematiche e naturali, mentre esprime il suo compiacimento per l'esito felicissimo della Spedizione De Filippi nell'Asia centrale con carattere scientifico intensivo in una zona di arduo accesso e per buona parte fino ad ora inesplorata, fa voti che il Regio Governo, auspice S. E. il Ministro dell'Istruzione, voglia fornire nella misura e coi mezzi, che stimerà più adatti, i fondi necessari perchè tutto il materiale raccolto e studiato e tutte le osservazioni scientifiche compiute trovino il debito posto in una serie di volumi, che conservino il frutto di tante fatiche a vantaggio della scienza e ad onore dell'Italia ».

Il voto precedente viene approvato all'unanimità.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 febbraio 1915.

Berlese A. — Acari nuovi. (Estr. dal « Redia » vol. X). Firenze, 1914. 8°.

Berlese A. — La distruzione della *Diaspis pentagona* a mezzo della *Prospaltella Berlesei* (Estr. dal « Redia », vol. X). Firenze, 1914. 8°.

Colomba L. — Speziaite, nuovo anfibolo di Traversella. (Estr. dagli « Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. 49). Torino, 1914. 8°.

Di-Stefano G. — La richthofenia dei calcari con fusulina di Palazzo Adriano nella valle del fiume Sosio. Tav. I-III. (Estr. dalla « Palaeontographia italica, vol. XX). Pisa, 1914. 8°.

Goebel K. — Organographie der Pflanzen. Zweite Auflage; erstel Teil. Allgemeine Organographie. Iena, 1913. 8°.

Lovisato D. — Altre specie nuove di *Clypeaster Scutella* ed *Amphiope* della Sardegna. (Estr. da « Riv. ital. di Paleontologia ». an. XX). Parma, 1914. 8°.

Ianet Ch. — L'esthétique dans les sciences de la nature. (Estr. du « Bulletin de la Societé zoologique de France », 1900). Paris, 1900. 8°.

Rivera V. — Ricerche sperimentali sulle cause predisponenti il frumento alla « Nebbia ». (*Erysiphe graminis* D. C.). Roma, 1915. 8°.

Stieltjes T. I. — Oeuvres complètes. T. I. Groningen, 1914. 8°.

Taramelli T. — Sulla storia geologica del Garda. Novara, 1914. 8°.

Turati E. — Revisione di una specie di erebia: *Erebia Alecto* Hb, *(nerine* Frr.) Estr. dagli « Atti della Società italiana di Sc. natur. », vol. LIII). Pavia, 1914. 8°.